

# **Simulation der Rissausbreitung mit Hilfe adaptiver Finite-Elemente-Verfahren für elastische und plastische Materialien**

Von der Fakultät für Maschinenbau, Verfahrens- und Energietechnik  
der Technischen Universität Bergakademie Freiberg  
genehmigte

## **DISSERTATION**

zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur  
(Dr.-Ing.)

vorgelegt

von Dipl.-Ing. Frank Rabold

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Meinhard Kuna (Freiberg)  
Prof. Dr.-Ing. habil. Holger Theilig (Zittau)

Tag der Verleihung: 9. November 2009



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Motivation . . . . .	1
1.2. Stand der Forschung . . . . .	2
<b>2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik</b>	<b>5</b>
2.1. Kinematik . . . . .	5
2.1.1. Konfiguration und Bewegung . . . . .	5
2.1.2. Deformationsgradient und Verzerrungstensoren . . . . .	7
2.1.3. Deformationsgeschwindigkeit . . . . .	8
2.1.4. Linearisierung für kleine Deformationen . . . . .	9
2.2. Spannungen . . . . .	9
2.3. Bilanzgleichungen . . . . .	11
2.3.1. Massebilanz . . . . .	11
2.3.2. Impulsbilanz . . . . .	12
2.3.3. Drehimpulsbilanz . . . . .	13
2.3.4. Hauptsätze der Thermodynamik . . . . .	13
2.4. Materialgesetze . . . . .	15
2.4.1. Elastisches Materialverhalten . . . . .	15
2.4.2. Elasto-plastisches Materialverhalten . . . . .	18
<b>3. Bruchmechanische Grundlagen</b>	<b>23</b>
3.1. Spannungsintensitätsfaktoren . . . . .	24
3.2. J-Integral . . . . .	27
3.3. Interaction-Integral . . . . .	29
<b>4. Schädigungsmechanische Grundlagen</b>	<b>33</b>
4.1. Duktile Schädigung . . . . .	34
4.2. ROUSSELIER-Modell . . . . .	35
4.3. Lokalisierung und akustischer Tensor . . . . .	38
4.4. Regularisierung . . . . .	43
<b>5. Adaptive FEM</b>	<b>47</b>
5.1. Finite-Elemente-Methode . . . . .	48
5.2. Fehlerschätzer . . . . .	52

5.3. Adaptive Netzanpassung . . . . .	54
5.3.1. Netzverfeinerung . . . . .	55
5.3.2. Netzvergrößerung . . . . .	58
<b>6. Kriterien für Rissausbreitung</b>	<b>61</b>
6.1. Rissausbreitung und Bruch . . . . .	61
6.2. Kriterium für spröde Rissausbreitung . . . . .	62
6.3. Kriterium für Ermüdungsrisswachstum . . . . .	66
6.4. Kriterium für duktile Rissausbreitung . . . . .	68
<b>7. FEM-Techniken zur Simulation der Rissausbreitung</b>	<b>71</b>
7.1. Allgemeines Programmschema zur Simulation von Risswachstum . . . . .	72
7.2. Simulation von Risswachstum für linear-elastisches Materialverhalten . .	74
7.2.1. Berechnung der K-Faktoren . . . . .	74
7.2.2. Algorithmus zur adaptiven Risserweiterung im FE-Netz . . . . .	79
7.2.3. Qualitative Bewertung der Vernetzung . . . . .	81
7.3. Simulation von Risswachstum für elasto-plastisches Materialverhalten . .	83
7.3.1. Nichtlokale Regularisierung . . . . .	85
7.3.2. Fehlerschätzer . . . . .	86
7.3.3. Vernetzungskontrolle . . . . .	87
7.3.4. Berechnung und Auswertung des akustischen Tensors . . . . .	88
7.3.5. Algorithmus zur adaptiven Risserweiterung im FE-Netz . . . . .	89
<b>8. Anwendungsbeispiele</b>	<b>91</b>
8.1. Modellierung des Risswachstums bei elastischem Materialverhalten . . . .	91
8.1.1. Rissausbreitung unter Modus-I-Beanspruchung . . . . .	91
8.1.2. Ermüdungsrisswachstum in Querkraftbiegeprobe . . . . .	103
8.1.3. Untersuchung des Einflusses von Materialeinschlüssen auf das Risswachstum . . . . .	108
8.2. Modellierung des Risswachstums bei elasto-plastischem Materialverhalten	113
8.2.1. Rissausbreitung unter Modus-I-Beanspruchung in CT-Probe . . .	113
8.2.2. Rissausbreitung unter Mixed-Mode-Beanspruchung . . . . .	124
<b>9. Zusammenfassung</b>	<b>129</b>
<b>A. Darstellung der Tensorrechnung</b>	<b>133</b>
<b>B. 6-Knoten-Dreieckelement</b>	<b>135</b>
<b>C. Interaction-Integral</b>	<b>137</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>141</b>

# Formelzeichen

## Lateinische Symbole

Symbol	Bedeutung
$a, \Delta a$	Risslänge, Rissverlängerung
$\Delta a_i^{\max}$	maximale inkrementelle Rissverlängerung
$A, A_0$	Fläche, Ausgangsfläche
$\tilde{A}$	Fläche unter der $F$ - $v$ -Kurve
$A_\phi$	Parameter für RICHARD-Kriterium
$\mathcal{A}$	verzerrungsähnliche innere Variable
$\mathbf{A}$	spannungsähnliche innere Variable
$\mathbf{b}$	linker CAUCHY-GREEN-Deformationstensor
$\hat{B}$	konjugierte Kraftgröße zur Schädigung $\beta$
$B$	Dicke der CT-Probe
$B_n$	Nettodicke der CT-Probe
$B_\phi$	Parameter für RICHARD-Kriterium
$\mathbf{B}$	Inverse des elastischen Deformationsanteils
$\mathbf{B}$	Matrix zur Verknüpfung der Verzerrungsgeschwindigkeit in einem Punkt mit der Geschwindigkeit der Knotenverschiebungen
$\bar{\mathbf{B}}$	linearisierte $\mathbf{B}$ -Matrix
$\mathbf{C}$	rechter CAUCHY-GREEN-Deformationstensor
$\tilde{\mathbf{C}}^e$	elastischer Anteil von $\mathbf{C}$ auf der Zwischenkonfiguration
$\mathbf{C}^p$	plastischer Anteil von $\mathbf{C}$
$C_p$	PARIS-Koeffizient
$\mathbf{d}$	Deformationsgeschwindigkeitstensor
$D$	ROUSSELIER-Materialparameter
$\mathcal{D}$	dissipierte Energie
$\mathbf{D}$	Materialtangente
$\mathbf{D}^e, D_{ijkl}^e$	Elastizitätstensor
$\mathbf{D}^e$	Elastizitätsmatrix
$\mathbf{D}^{\text{hyp}}$	hyperelastische Materialtangente
$\vec{e}_i$	Basisvektoren
$\mathbf{e}$	ALEMANSI-EULER-Verzerrungstensor

Symbol	Bedeutung
$E$	Elastizitätsmodul
$E_i$	innere Energie
$E_k$	kinetische Energie
$E_t$	totale Energie
$\mathbf{E}$	GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor
$\mathbf{E}^e$	elastischer Anteil von $\mathbf{E}$
$\mathbf{E}^p$	plastischer Anteil von $\mathbf{E}$
$\mathbf{E}$	Verzerrungsmatrix
$f, f_0$	Hohlraumvolumenanteil, Anfangshohlraumvolumenanteil
$f_c$	kritischer Hohlraumvolumenanteil für Materialversagen
$f_c^{\text{net}}$	kritischer Hohlraumvolumenanteil für adaptive Netzverfeinerung
$\mathbf{f}$	Kraftvektor
$\mathbf{f}_v$	Volumenkräfte
$F$	Betrag des Kraftvektors
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient
$\mathbf{F}^e$	elastischer Anteil von $\mathbf{F}$
$\mathbf{F}^p$	plastischer Anteil von $\mathbf{F}$
$\mathbf{F}_i^s$	Deformationsgradient an der Rissspitze im Element $i$
$\mathbf{F}$	Matrix des Deformationsgradienten
$\mathbf{g}$	Sprung der Deformationsgeschwindigkeit
$G$	Schubmodul
$\mathbf{G}$	Matrix der Formfunktionen
$\bar{\mathbf{G}}$	Matrix zur Veknüpung von Verschiebungsgradient in einem Punkt und den Elementknoten-Verschiebungen
$h_E$	charakteristische Elementlänge
$I^{12}$	Interaction-Intergral
$I_i^{12}$	Anteil des Interaction-Intergrals im Konturelement
$I, II, III$	Invarianten
$I_C, II_C, III_C$	Invarianten des rechten CAUCHY-GREEN-Deformationstensor
$I_E, II_E, III_E$	Invarianten des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor
$II_{T^D}$	2. Invariante des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungsdeviators
$I_T, II_T, III_T$	Invarianten des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
$I_\sigma, II_\sigma, III_\sigma$	Invarianten des CAUCHY-Spannungstensor
$\mathbf{I}, \mathbf{I}^{[4]}$	Einheitstensor, Einheitstensor 4. Stufe
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$J$	J-Integral
$J_c$	kritischer Werkstoffkennwert
$\hat{J}$	JACOBI-Determinante
$\mathbf{J}, J_i$	J-Integralvektor
$\hat{\mathbf{J}}$	JACOBI-Matrix

Symbol	Bedeutung
$\mathbf{k}$	Massenkräfte
$K_I, K_{II}, K_{III}$	Spannungsintensitätsfaktoren
$\bar{K}_I, \bar{K}_{II}$	Mittelwerte der Spannungsintensitätsfaktoren
$\Delta K$	zyklischer Spannungsintensitätsfaktor
$\Delta K_{th}$	Schwellwert für Ermüdungsrisswachstum
$K_{Ic}, K_{IIc}, K_{IIIc}$	Bruchzähigkeiten
$K_v$	Vergleichs-Spannungsintensitätsfaktor
$K^{\max}$	Maximum der Spannungsintensität
$K^{\min}$	Minimum der Spannungsintensität
$\mathbf{K}$	Gesamtsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_i^e$	Elementsteifigkeitsmatrix
$l_c$	charakteristische Länge
$l_\Gamma^e$	Länge der Berechnungskontur im finiten Element
$l_K$	Elementkantenlänge
$l_K^{\min}$	Schwellwert für minimale Elementkantenlänge
$\mathbf{l}$	Geschwindigkeitsgradient
$L$	Länge einer Strecke
$m_P$	PARIS-Exponent
$M$	Masse
$n_E$	Anzahl der finiten Elemente
$n_G$	Anzahl der GAUSS-Punkte im Element
$n_K$	Anzahl der Knoten im Element
$n_S$	Anzahl der Risspitzenelemente
$n_\Gamma$	Anzahl der Berechnungskonturen
$n_{\Gamma_e}$	Anzahl der Elementkonturen
$n_\sigma$	Exponent der Verfestigungsfunktion
$\mathbf{n}, n_i$	Normalenvektor in der Momentankonfiguration
$\bar{\mathbf{n}}, \mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}$	Hauptachsenrichtungen
$\mathbf{n}_K$	Normalenvektor auf Elementkante
$N$	Anzahl der Lastzyklen
$N_{co}$	Anzahl der Schritte zur Rissöffnung
$N_{Ls}$	Anzahl der Lastschritte
$N_T$	minimale Anzahl von Elementteilungen
$N_i$	Formfunktionen
$\mathbf{N}$	Normalenvektor in der Ausgangskonfiguration
$\mathbf{p}$	Nennspannungsvektor
$P$	mechanische Leistung
$\hat{P}$	konjugierte Karftgröße zur plast. Vergleichsdehnung $\varepsilon_v^p$
$\mathbf{P}$	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
$q$	Flächenlast

Symbol	Bedeutung
$Q$	Wärmezufuhr
$\mathbf{Q}, \mathbf{q}$	akustischer Tensor in der Ausgangs- und Momentankonfiguration
$r$	Polarkoordinate, Radius
$r_\Gamma$	Radius für Kontursuche
$R$	Spannungsverhältnis $K_{\min}/K_{\max}$
$R_\sigma$	Verfestigungsfunktion
$\mathbf{R}$	Randkräfte
$s$	Wegkoordinate
$s_K$	Kerblage
$\mathbf{s}$	Abstandsvektor
$t, t_0$	Zeit, Startzeit
$\mathbf{t}$	Spannungsvektor
$\mathbf{T}$	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
$\mathbf{T}$	Spannungsmatrix
$u$	Betrag des Verschiebungsvektor
$\tilde{u}$	spezifische innere Energie
$\mathbf{u}, u_i$	Verschiebungsvektor
$\tilde{\mathbf{u}}^e$	Matrix der Elementknoten-Verschiebungen
$\mathbf{u}$	Verschiebungsmatrix
$U$	Formänderungsenergiedichte
$v$	Kerbaufweitung
$\mathbf{v}$	Vektor der Geschwindigkeit
$V, V_0$	Volumen, Ausgangsvolumen
$V_0^e$	Elementvolumen
$\mathbf{w}$	Drehgeschwindigkeitstensor
$W$	Weite, Abmessung an der CT-Probe
$\tilde{W}$	elastisches Potential
$\mathbf{x}, x_i$	Ortsvektor in der Momentankonfiguration
$\mathbf{X}, X_i$	Ortsvektor in der Ausgangskonfiguration
$\tilde{\mathbf{X}}$	Matrix der Elementknoten-Koordinaten
$\mathbf{X}$	Koordinatenmatrix
$\mathbf{y}, y_i$	Vektor der Feldvariablen
$y^{\text{Sohn}}$	Feldvariable im Sohn-Element
$y^{\text{Vater}}$	Feldvariable im Vater-Element
$Y$	Fließbedingung
$Y_I, Y_{II}$	Korrekturfunktionen



## Griechische Symbole

Symbol	Bedeutung
$\alpha$	Wichtungsfunktion für die nichtlokale Regularisierung
$\alpha_1$	Werkstoffparameter für RICHARD-Kriterium
$\alpha_E^f, \alpha_Y^f, \alpha_K^f$	adaptiver Verfeinerungsparameter
$\alpha_E^g$	adaptiver Vergrößerungsparameter
$\alpha_E^{th}, \alpha_Y^{th}, \alpha_K^{th}$	Abbruchparameter der adaptiven Netzanpassung
$\beta$	Schädigung
$\Delta\bar{\beta}$	regularisierte Schädigungsänderung
$\Delta\tilde{\beta}$	gewichtete Schädigungsänderung am GAUSS-Punkt
$\gamma_i^S$	Elementwinkel an der Rissspitze
$\Gamma, \Gamma_i$	Berechnungskonturen
$\Gamma_i^e$	Berechnungskontur im finiten Element
$\delta$	Variationssymbol
$\delta_{ij}$	KRONECKER-Delta
$\varepsilon$	infinitesimaler Verzerrungstensor
$\varepsilon_V^p$	plastische Vergleichsdehnung
$\epsilon_J$	Parameter für die Genauigkeit der bruchmechanischen Berechnung
$\epsilon_{slv}$	Abbruchschranke des CG-Solvers
$\varepsilon_0$	Verfestigungsparameter
$\zeta$	dimensionslose Koordinate
$\zeta_\epsilon$	kritischer Knotenabstand
$\eta$	Entropie
$\eta_G$	Fehlerschätzer
$\eta_E, \eta_K$	Fehlerindikator bezüglich des Gleichgewichts
$\eta_Y$	Fehlerindikator bezüglich der Fließbedingung
$\bar{\eta}_E, \bar{\eta}_K$	Vergleichswert für den Fehlerindikator bezüglich des Gleichgewichts
$\bar{\eta}_Y$	Vergleichswert für den Fehlerindikator bezüglich der Fließbedingung
$\bar{\eta}_{E1}, \bar{\eta}_{K1}, \bar{\eta}_{Ymax}$	Vergleichswert zur Abbruchsteuerung der adaptiven Netzanpassung
$\theta$	Richtung der Lokalisierungsebene
$\dot{\lambda}$	plastischer Multiplikator
$\lambda$	LAMÉsche Konstante
$\lambda_D$	Materialkonstante
$\mu$	LAMÉsche Konstante
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\xi, \xi_i$	lokale Elementkoordinaten
$\rho, \rho_0$	Dichte, Anfangsdichte
$\varrho$	Verhältnis der Spannungsintensitätsfaktoren $K_{II}/K_I$
$\sigma_0$	Anfangsfließspannung
$\sigma_1$	ROUSSELIER-Materialparameter

Symbol	Bedeutung
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	Hauptspannungen
$\Sigma_H$	hydrostatische Spannung
$\Sigma_V$	VON-MISES-Vergleichsspannung
$\sigma_Y$	Fließspannung
$\sigma_{YM}$	Fließspannung des Matrixmaterials
$\sigma_\phi$	Umfangsspannung
$\sigma_\phi^{\max}$	maximale Umfangsspannung
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	CAUCHY-Spannungstensor
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\sigma}_{ij}$	CAUCHY-Spannungstensor im Hauptachsensystem
$\vartheta$	Temperatur
$\varphi$	Abbildungsoperator
$\phi$	Polarwinkel
$\phi_0$	Richtung der Rissausbreitung
$\psi$	freie HELMHOLTZ-Energie
$\psi_e$	elastische Anteil der freien Energie
$\psi_p$	plastische Anteil der freien Energie
$\omega_i$	Wichtungsfaktor der GAUSS-Integration
$\Omega$	Fläche eines Elements
$\Omega_r$	Fläche des repräsentativen Volumenelements
$\bar{\Omega}_r$	numerisch berücksichtigte Fläche von $\Omega_r$

# 1. Einleitung

## 1.1. Motivation

In vielen Fällen ist das Entstehen und Wachsen von Rissen, besonders Ermüdungsrissen, die Ursache für das Versagen eines im Betrieb befindlichen, mechanisch beanspruchten Bauteils und kann unter Umständen zu erheblichen Sach- und Personenschäden führen. In dem Zusammenhang ist die Frage nach der verbleibenden Restlebensdauer, in der ein durch Risse geschädigtes Bauteil weiter seine Funktion erfüllen kann, von erheblicher wirtschaftlicher Bedeutung. Demgegenüber steht die Produktentwicklung mit immer kürzeren Entwicklungszeiten sowie steigendem Kostendruck und der daraus resultierenden Forderung, das Verhalten eines konzipierten Bauteils frühzeitig unter realitätsnahen Bedingungen testen zu können. Hierbei ist unter anderem eine schadenstolerante Bauteilauslegung von Interesse, bei der man z.B. von Anfang an das Vorhandensein von Rissen in einer Struktur duldet. Es werden dann geeignete konstruktive Maßnahmen gesucht, die ein entsprechendes Bauteilversagen verhindern sollen. Die Rissausbreitung kann aber auch ein gewolltes Ereignis, z.B. für die Funktion einer Sollbruchstelle, sein. Letztendlich steht die Forderung nach einer kostengünstigen und schnellen Antwort auf die Frage: Breitet sich ein Riss unter einer bestimmten Beanspruchung weiter aus, und wenn ja, in welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit?

Durch die rapide Entwicklung der Computertechnik in den vergangenen Jahren stellt die numerische Simulation der Rissausbreitung mittlerweile eine sinnvolle Ergänzung zu den bruchmechanischen Versuchen dar bzw. ersetzt sie sogar. Vor allem bei der Untersuchung von komplizierten Bauteilen lassen sich durch den Einsatz leistungsfähiger Hard- und Software aufwändige und teure Experimente vermeiden. Als ein zuverlässiges, computergestütztes Berechnungsverfahren hat sich dabei die Finite-Elemente-Methode (FEM) etabliert. Aufgrund der Vielseitigkeit sowie Robustheit ist die FEM im Ingenieurwesen sehr verbreitet und kann mittlerweile als der Industriestandard angesehen werden.

Es ist in der Regel nicht möglich, für komplexe Bauteile das gesamte Risswachstum anhand der FE-Analyse einer einzelnen Risskonfiguration vorherzusagen. Durch die Rissausbreitung, die mit der Bildung neuer Rissoberflächen verbunden ist, kommt es zu einer ständigen Veränderung in der Geometrie des Risses und damit auch des Berechnungs-

modells. Insbesondere hängt die Rissbeanspruchung von der aktuellen Risslänge ab, so dass eine zeitliche und inkrementelle Betrachtung der Rissentwicklung notwendig ist. Für eine genaue Untersuchung des Risswachstums müssen dann eine Vielzahl aufeinander folgender Risskonfigurationen mit Hilfe der FEM analysiert werden. Die manuelle Erstellung der dafür notwendigen Modelle ist im Allgemeinen sehr mühsam und wirtschaftlich nicht zu vertreten, so dass an dieser Stelle eine Automatisierung des gesamten Ablaufs sinnvoll ist. Um die Vorgehensweise effizient zu gestalten, werden adaptive Verfahren eingesetzt, welche eine dem jeweils aktuellen Problem angepasste Generierung der notwendigen Berechnungsmodelle gestatten. Das betrifft vor allem die automatische Erzeugung der neuen Rissoberflächen sowie eine adäquate Vernetzung der Rissumgebung mit finiten Elementen.

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung von Algorithmen zur effizienten und automatisierten Modellierung der Rissausbreitung unter der Verwendung adaptiver Finite-Elemente-Verfahren und deren Implementierung in ein numerisches Simulationsprogramm.

## 1.2. Stand der Forschung

Der Bedarf, die Entstehung und Ausbreitung von Makrorissen numerisch genauer zu untersuchen, führte vor mehr als 40 Jahren zur Entwicklung diskreter Rissmodelle [92, 122]. Seit dem wird die Finite-Elemente-Methode erfolgreich zur Lösung von verschiedenen Riss- und Risswachstumsproblemen eingesetzt. Die anfänglichen einfachen Berechnungsmodelle gestatteten die Rissausbreitung nur entlang vorhandener Elementkanten [3, 39, 91] und führten zu erheblichen Einschränkungen in der Diskretisierung und damit der Qualität der erhaltenen Ergebnisse. Obwohl die FE-Simulation des Ermüdungsrisswachstums oder der dynamischen Rissausbreitung in komplizierten räumlichen Strukturen bereits möglich ist [115, 135], stellt die Modellierung von Risswachstum nach wie vor ein anspruchsvolles und schwieriges Problem dar, für das effiziente und vollautomatisierte Lösungsalgorithmen unter der Berücksichtigung moderner FE-Techniken zu entwickeln sind.

Die diskrete Modellierung der Rissausbreitung erfordert für jeden Simulationsschritt die Anpassung des Berechnungsmodells bezüglich der momentanen Risskonfiguration und der aktuellen Belastung. Das beinhaltet insbesondere die Generierung neuer belastungsfreier Oberflächen zur Realisierung einer inkrementellen Rissausbreitung. Der Stand der Forschung wird überwiegend durch ingenieurmäßig pragmatische Algorithmen charakterisiert, welche im FE-Modell die Verschiebung der Risspitze und eine damit verbundene Änderung der Elementvernetzung realisieren [37, 46, 62, 65, 134, 135, 141].

Ein Anwendungsgebiet von diskreten Rissmodellen stellt die linear-elastische Bruch-

mechanik (LEBM) und die damit einhergehende Notwendigkeit der Bestimmung von Bruchkenngrößen (z.B. Spannungsintensitätsfaktoren, J-Integral) dar. Zur Verbesserung der numerischen Ergebnisse in der Rissspitzenumgebung werden vielfach spezielle Rissspitzenvernetzungen erzeugt, die unter der Verwendung von kollabierten Viertelpunkt-Elementen [58, 14] die Rissspitzensingularität besser abbilden und mit der Rissspitze mitbewegt werden [93]. Mit dieser Vorgehensweise erhöht sich der Aufwand insbesondere für dreidimensionale Probleme, da eine ständige Anpassung der Vernetzung in der Rissspitzenumgebung an das Spezialnetz erfolgen muss. Durch den Einsatz der sogenannten Submodelltechnik [59, 115] kann dieses Spezialnetz innerhalb eines Submodells realisiert werden. Die notwendigen kinematischen Randbedingungen für das Submodell werden dann unmittelbar aus dem Globalnetz ermittelt und die tatsächliche Rissspitze kann adäquat vernetzt werden. Durch dieses Verfahren wird zudem eine effiziente automatisierte numerische Bestimmung und Auswertung der bruchmechanischen Größen gestattet.

Für die diskrete Modellierung der Rissausbreitung ist die automatische Anpassung der Vernetzung inzwischen Stand der Technik [34, 101]. Eine Verbesserung der numerischen FE-Lösung für ein Modell mit sich ständig ändernder Rissgeometrie erreicht man durch die Anwendung einer selbst-adaptiven Verfeinerungsstrategie, bei der die Vernetzung über die Auswertung eines a-posteriori Fehlerschätzer gesteuert wird [12, 35]. Dadurch verringert man den numerischen Diskretisierungsfehler vor allem in der Umgebung der Rissspitze, siehe z.B. [33, 66, 67, 78]. Für die a-posteriori Fehlerschätzung haben sich besonders die residualen Fehlerschätzer [9, 10] und die auf einer Energienorm basierten Fehlerschätzer [146, 147] bewährt. Von Vorteil ist, dass sich diese Fehlergrößen vollständig aus der numerischen Lösung bestimmen lassen. Ein auf dem Spannungsintensitätsfaktor beruhender Fehlerschätzer für die Rissspitzenregion wird in [96] vorgestellt.

Die Verfahren zur globalen adaptiven Neuvernetzung sind, z.B. wegen des kompletten Datentransfers auf das neue Elementnetz bei inelastischen Materialverhalten, gewöhnlich nicht sehr effektiv und fehlerbehaftet. Leistungsfähigere Methoden beinhalten lokale Strategien zur Netzverfeinerung und -vergrößerung speziell für nichtlineare inkrementelle Lösungsverfahren [77]. Besonders hierarchische Techniken zeigen hier ihre Stärken [30, 49, 113], indem ausgehend von einem optimalen Grobnetz die lokale Elementqualität bei einer Netzverfeinerung durchgehend erhalten bleibt und eine anschließende problemlose Vergrößerung der Vernetzung ermöglicht. Mit dem Einsatz moderner hierarchischer FE-Solver mit Multi-Level-Struktur können die Informationen aller adaptiv-iterativ hierarchisch erzeugten Netze zur schnellen und effizienten Lösung des gestellten Rissproblems genutzt werden [83, 85, 86].

Ein ebenso anspruchsvolles Problem stellt die Modellierung des eigentlichen Bruchvorgangs dar. Mit Hilfe der Kohäsivzonenmodelle [13, 42] lässt sich der Prozess der Materialseparation an der Rissspitze auf geeignete Weise numerisch simulieren [90]. Die Werkstofftrennung wird dabei mit Hilfe spezieller Kohäsiv-Elemente modelliert. Über das Kohäsivgesetz, welches das Konstitutivverhalten dieser Elemente beschreibt, können

unterschiedliche Werkstoffe und Versagensmechanismen berücksichtigt werden [28].

Eine Modellierung der mikromechanischen Versagensprozesse kann mittels der Schädigungsmechanik erfolgen. Für die Beschreibung der duktilen Schädigung (Bildung, Wachstum und Koaleszens von Hohlräumen) haben sich besonders das GURSON-Modell [52], seine Weiterentwicklung als GTN-Modell [138] sowie das ROUSSELIER-Modell [110] bewährt. Mit Hilfe dieser Schädigungsmodelle lässt sich das duktile Versagen in der Prozesszone an der Rissspitze simulieren. Das lokale Materialversagen tritt dann ein, wenn der Hohlraumvolumenanteil als Maß für die Schädigung eine kritische Größe erreicht hat. Durch das anschließende Herabsetzen der Steifigkeit im betreffenden GAUSS-Punkt bzw. finiten Element kann das duktile Wachstum eines Makrorisses numerisch simuliert werden [72, 103, 104, 128, 133].

Eine weitgehend vollständige Beschreibung des Versagensprozesses von der Initiierung bis zur Ausbreitung von Rissen wird durch die Verbindung von Schädigungsmechanik und Bruchmechanik ermöglicht, bei der die Schädigungsentwicklung im Werkstoff bei Erreichen eines kritischen Wertes mit der makroskopischen Rissausbreitung (Generieren neuer Rissoberflächen) kombiniert wird [82, 121]. Eine adaptive Steuerung der Vernetzung kann über die Schädigungsrate in den Elementen erfolgen [81, 82]

Da die Modellierung diskreter Risse in der klassischen FEM nur entlang von Elementgrenzen möglich ist, besteht eine Diskretisierungsabhängigkeit für die numerische Lösung. Die ständige Modellanpassung an den aktuellen Rissverlauf führt zudem zu einem höheren Verwaltungsaufwand. In der Erweiterte-Finite-Elemente-Methode (X-FEM) werden diskontinuierliche Ansatzfunktionen in die Finite-Elemente-Approximation mit einbezogen, so dass eine effiziente, vom FE-Netz unabhängige Beschreibung des Materialverhaltens im Versagensbereich ermöglicht wird. Spezielle Rissspitzenfunktionen gestatten die Modellierung der kontinuierlichen Rissausbreitung unabhängig von Elementkanten und ohne Notwendigkeit einer Neuvernetzung [1, 20, 41, 43]. Zur Lösung von dreidimensionalen Rissausbreitungsproblemen wurde diese Methode erweitert [48, 88, 132].

## 2. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen der Kontinuumsmechanik behandelt, welche für die Beschreibung des Deformationsverhaltens und der Gleichgewichtsbedingungen eines Körpers sowie zur Formulierung von thermodynamisch konsistenten Werkstoffgesetzen benötigt werden. Für eine vollständige und ausführlichere Darstellung der Thematik wird auf [2, 11, 22, 55, 75, 137] verwiesen.

### 2.1. Kinematik

#### 2.1.1. Konfiguration und Bewegung

Ein materieller Körper  $\mathcal{B}$  wird als eine Menge von materiellen Punkten  $\mathcal{P}$  definiert, die im dreidimensionalen EUKLIDischen Raum einen einfach zusammenhängenden Bereich einnehmen. Jeder Punkt  $\mathcal{P}$  ist einem Ort im Raum zugeordnet und zu jedem Zeitpunkt  $t$  eindeutig über den Ort identifizierbar. Diese eindeutige Abbildung der materiellen Punkte  $\mathcal{P}$  im Raum ist die Konfiguration vom Körper  $\mathcal{B}$ . Die zeitliche Abfolge verschiedener Konfigurationen, d.h. eine zeitliche Änderung des Bereiches, die der Körper  $\mathcal{B}$  im Raum einnimmt, wird als Bewegung bezeichnet. Die gesamte Bewegung setzt sich dabei aus Starrkörperbewegungen (Translation, Rotation) und den Verformungen des Körpers zusammen.

Die zu einem Zeitpunkt  $t = t_0$  eingenommene Konfiguration des unverformten Körpers wird als die Referenz- bzw. Ausgangskonfiguration definiert (siehe Abbildung 2.1). Mit Hilfe eines beliebigen raumfesten Koordinatensystems mit den Basisvektoren  $\vec{e}_i$  kann man jedem materiellen Punkt  $\mathcal{P}$  einen Ortsvektor

$$\mathbf{X} = X_i \vec{e}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

zuweisen. Die auf den Ausgangszustand bezogenen Koordinaten  $X_i$  werden materielle oder LAGRANGESche Koordinaten genannt. Für den Zeitpunkt  $t > t_0$  nimmt der Körper

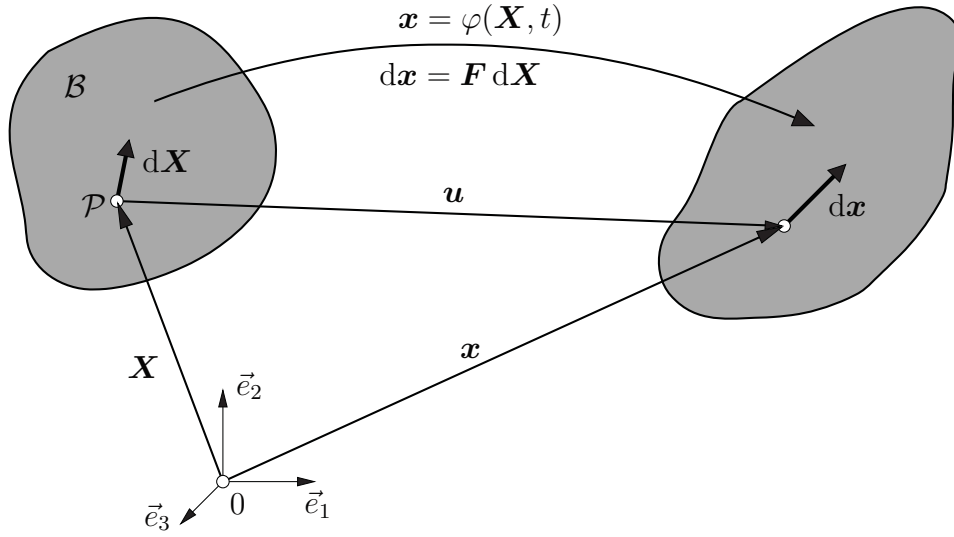
Ausgangskonfiguration ( $t = t_0$ )Momentankonfiguration ( $t > t_0$ )

Abbildung 2.1.: Ausgangs- und Momentankonfiguration

eine Momentankonfiguration ein, in der sich der materielle Punkt  $\mathcal{P}$  durch den aktuellen Ortsvektor

$$\mathbf{x} = x_i \vec{e}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

beschreiben lässt. Die dazugehörigen Koordinaten  $x_i$  heißen räumliche oder EULERSche Koordinaten.

Die Bewegung eines materiellen Punktes  $\mathcal{P}$  zwischen der Ausgangs- und der Momentankonfiguration beschreibt man über die Abbildungsvorschrift

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \quad (2.3)$$

und ist mit

$$\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (2.4)$$

eindeutig umkehrbar. Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  wird dann als die Differenz zwischen der Position des Punktes in der Momentankonfiguration und der Position in der Ausgangskonfiguration mit

$$\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{X}, t) - \varphi(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.5)$$

definiert.



### 2.1.2. Deformationsgradient und Verzerrungstensoren

Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  ist mit

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.6)$$

als lineare Abbildung des differentiellen Linienelements  $d\mathbf{X}$  der Ausgangskonfiguration auf ein differentielles Linienelement  $d\mathbf{x}$  der Momentankonfiguration definiert (vgl. Abbildung 2.1). Er ist ein Tensor 2. Stufe und lässt sich mit

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} = \text{grad}(\mathbf{X} + \mathbf{u}) = \mathbf{I} + \text{grad}(\mathbf{u}) \quad (2.7)$$

durch den Verschiebungsgradienten ausdrücken. Fällt die Momentankonfiguration mit der Ausgangskonfiguration zusammen, dann ist  $\mathbf{F}$  mit dem Einheitstensor  $\mathbf{I}$  identisch. Analog wird mit der Inversen des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}^{-1}$  über die Beziehung

$$d\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.8)$$

die Deformation eines Linienelements in der Ausgangskonfiguration aus der Perspektive der Momentankonfiguration beschrieben.

Für die Eineindeutigkeit der Abbildung  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$  muss die Bedingung

$$\hat{J} = \det(\mathbf{F}) \neq 0 \quad (2.9)$$

erfüllt sein. Hierbei ist  $\hat{J}$  die so genannte JACOBI-Determinante. Um Durchdringungen während des Deformationsprozesses auszuschließen, muss zusätzlich der Forderung

$$\hat{J} > 0 \quad (2.10)$$

nachgekommen werden. Für den Zeitpunkt  $t = t_0$  ist  $\hat{J} = 1$ .

Mittels des Deformationsgradienten lassen sich für beide Konfigurationen die Zusammenhänge zwischen Volumenelementen ( $dV_0 \leftrightarrow dV$ ) bzw. Flächenelementen ( $dA_0 \leftrightarrow dA$ ) angeben:

$$dV = \det(\mathbf{F}) dV_0 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{n} dA = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} dA_0. \quad (2.12)$$

Durch die Beziehung in Gl. (2.12) kann dann auch der Normalenvektor  $\mathbf{N}$  der Fläche  $dA_0$  in der Ausgangskonfiguration auf den Normalenvektor  $\mathbf{n}$  der Fläche  $dA$  in der Momentankonfiguration und umgekehrt abgebildet werden.

Durch den Deformationsgradienten werden sowohl die Längenänderungen als auch die Starrkörperdrehungen des betrachteten differentiellen Linienelements  $d\mathbf{X}$  berücksichtigt. Da der Drehanteil von geringerem Interesse ist, wird dieser abgespalten. Man erhält den auf die Ausgangskonfiguration bezogenen rechten CAUCHY-GREEN-Deformationstensor  $\mathbf{C}$  und den auf die Momentankonfiguration bezogenen linken CAUCHY-GREEN-Deformationstensor  $\mathbf{b}$  :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T. \quad (2.14)$$

Für eine reine Starrkörperbewegung sind dann die Deformationstensoren  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{b}$  mit dem Einheitstensor  $\mathbf{I}$  identisch.

Bildet man die Differenz zwischen dem Quadrat eines differentiellen Linienelements in der Momentan- und der Ausgangskonfiguration mit

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.15)$$

so lassen sich damit der GREEN-LAGRANGESche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  (bezogen auf die Ausgangskonfiguration) und der ALEMANSI-EULERSche Verzerrungstensor  $\mathbf{e}$  (bezogen auf die Momentankonfiguration) ableiten:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.16)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}). \quad (2.17)$$

Diese Tensoren 2. Stufe sind symmetrisch und im unverzerrten Zustand mit dem Nulltensor  $\mathbf{0}$  identisch. Über den Deformationsgradienten lassen sich die Verzerrungstensoren mit

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.19)$$

ineinander umrechnen.

### 2.1.3. Deformationsgeschwindigkeit

Für die Formulierung inelastischer Materialgesetze spielt die Deformationsgeschwindigkeit eine besondere Rolle. Mit der Geschwindigkeit eines materiellen Punktes  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$  erhält man über die materielle Zeitableitung von Gl. (2.6)

$$d\mathbf{v} = d\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} \cdot d\mathbf{X} = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{l} \cdot d\mathbf{x}. \quad (2.20)$$

Der Geschwindigkeitsgradient

$$\boldsymbol{l} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \quad (2.21)$$

lässt sich mit

$$\boldsymbol{l} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^T) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}^T) = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{w} \quad (2.22)$$

in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegen. Hierbei ist  $\boldsymbol{d}$  der symmetrische Deformationsgeschwindigkeitstensor und mit  $\boldsymbol{w}$  wird der antisymmetrische Tensor der Drehgeschwindigkeit bezeichnet. Zu den Zeitableitungen<sup>1</sup> der Verzerrungstensoren besteht dann der folgende Zusammenhang:

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{F} \quad (2.23)$$

$$\boldsymbol{d} = \dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{l}^T \cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{l}. \quad (2.24)$$

### 2.1.4. Linearisierung für kleine Deformationen

Für viele Anwendungen der Kontinuumsmechanik müssen lediglich kleine Deformationen berücksichtigt werden. Formuliert man den GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensor  $\boldsymbol{E}$  mit

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) = \frac{1}{2}[\text{grad}(\boldsymbol{u}) + \text{grad}^T(\boldsymbol{u}) + \text{grad}^T(\boldsymbol{u}) \cdot \text{grad}(\boldsymbol{u})] \quad (2.25)$$

unter Zuhilfenahme des Verschiebungsgradienten (vgl. Gl. (2.7)), so kann unter der Annahme kleiner Deformationen der nichtlineare quadratische Term  $\text{grad}^T(\boldsymbol{u}) \cdot \text{grad}(\boldsymbol{u})$  vernachlässigt werden. Es ergibt sich der infinitesimale Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  mit

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{E} \approx \frac{1}{2}[\text{grad}(\boldsymbol{u}) + \text{grad}^T(\boldsymbol{u})]. \quad (2.26)$$

Die Linearisierung des ALMANSI-EULERSchen Verzerrungstensors  $\boldsymbol{e}$  ist mit der des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors  $\boldsymbol{E}$  identisch und es muss in dem Fall nicht mehr zwischen der materiellen und der räumlichen Formulierung unterschieden werden.

## 2.2. Spannungen

Wirken auf einen deformierbaren Körper äußere Lasten ein, so entstehen im Körper innere Kräfte, die den Beanspruchungszustand des Körpers charakterisieren. Durch einen

<sup>1</sup>Für Tensoren in räumlichen Koordinaten ist die materielle Zeitableitung nicht objektiv. In dem Fall wird als objektive Zeitableitung die LIE-Ableitung [80, 120] verwendet.

hypothetischen Schnitt, welcher den Körper in zwei Teilkörper zerlegt, können die inneren Kräfte entlang der Schnittebene freigelegt werden. Man erhält dann am Ort  $\mathbf{x}$  für die Schnittfläche  $dA$  mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  und der wirkenden Schnittkraft  $d\mathbf{f}$  den Spannungstensor

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \frac{d\mathbf{f}}{dA}, \quad (2.27)$$

welcher auf die Momentankonfiguration bezogen ist und auch CAUCHYScher Spannungstensor genannt wird. Über die lineare Abbildung

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \quad (2.28)$$

lässt sich dann der CAUCHYSche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  definieren, der für ein infinitesimales Volumenelement den Spannungszustand in der Momentankonfiguration vollständig wiedergibt. Der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , auch als „wahrer Spannungstensor“ bekannt, ist als Tensor 2. Stufe symmetrisch und objektiv.

Mittels einer Hauptachsentransformation kann der symmetrische Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  in ein gegenüber dem Koordinatensystem  $\vec{e}_i$  gedrehtes Bezugssystem, das so genannte Hauptachsensystem, umgerechnet werden und man erhält den Spannungstensor  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ . Für diesen Spannungstensor existieren nur die drei Normalspannungskomponenten  $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{22}$  und  $\bar{\sigma}_{33}$ . Die Schubspannungskomponenten  $\bar{\sigma}_{ij}$  ( $i \neq j$ ) verschwinden. Die Bestimmung der drei Normalspannungskomponenten, auch Hauptspannungen genannt, kann mit Hilfe der Eigenwertaufgabe

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}} - \bar{\sigma} \mathbf{I} \cdot \bar{\mathbf{n}} = (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\sigma} \mathbf{I}) \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.29)$$

erfolgen, welche ein homogenes lineares Gleichungssystem darstellt und nur dann nicht-triviale Lösungen hat, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \bar{\sigma} \mathbf{I}) = 0. \quad (2.30)$$

Hierbei ist  $\bar{\sigma}$  die gesuchte Hauptnormalspannung und  $\bar{\mathbf{n}}$  die dazugehörige Hauptachsenrichtung. Die Auflösung von Gl. (2.30) führt auf die Gleichung 3. Grades

$$\bar{\sigma}^3 - I_{\boldsymbol{\sigma}} \bar{\sigma}^2 + II_{\boldsymbol{\sigma}} \bar{\sigma} - III_{\boldsymbol{\sigma}} = 0, \quad (2.31)$$

mit  $I_{\boldsymbol{\sigma}}$ ,  $II_{\boldsymbol{\sigma}}$  und  $III_{\boldsymbol{\sigma}}$  als die Invarianten des CAUCHY-Spannungstensors. Die drei reellen Lösungen von Gl. (2.31) sind die Hauptspannungen  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  und  $\sigma_{III}$  und es gilt dabei die Größenordnung

$$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}. \quad (2.32)$$

Mit dem Einsetzen der Hauptspannungen in das Gleichungssystem (2.29) erhält man die drei dazugehörigen, senkrecht zueinander stehenden Hauptachsenrichtungen  $\mathbf{n}_I$ ,  $\mathbf{n}_{II}$  und  $\mathbf{n}_{III}$ .

Für die Betrachtung der Spannungsgrößen in der Ausgangskonfiguration werden die aktuellen Schnittkräfte  $d\mathbf{f}$  auf die Ausgangsfläche  $dA_0$  bezogen und man erhält den Nennspannungsvektor

$$\mathbf{p}(\mathbf{X}, \mathbf{N}) = \frac{d\mathbf{f}}{dA_0}. \quad (2.33)$$

Der dazugehörige Spannungstensor  $\mathbf{P}$  ist der 1. PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannungstensor und wird über die Abbildung

$$\mathbf{p}(\mathbf{X}, \mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{N} \quad (2.34)$$

definiert. Mittels des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  lässt sich über die Beziehung

$$\mathbf{P} = \det(\mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.35)$$

der Spannungstensor  $\mathbf{P}$  aus dem CAUCHY-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  bestimmen. Dabei gehen durch die Umrechnung die Eigenschaften der Symmetrie und Objektivität von  $\boldsymbol{\sigma}$  verloren, weshalb sich die Anwendung des 1. PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensors in einigen Fällen als ungünstig erweist. Aus diesem Grund wird mit

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.36)$$

der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{T}$  eingeführt, indem neben dem Flächenelement auch der Schnittkraftvektor von der Momentan- in die Ausgangskonfiguration transformiert wird. Damit erhält man einen symmetrischen und objektiven Tensor, der als Pseudo-Spannungstensor eine reine Rechengröße ist und kein physikalisch interpretierbares Spannungsmaß darstellt.

## 2.3. Bilanzgleichungen

Die Bilanzgleichungen stellen die fundamentalen Beziehungen der Kontinuumsmechanik dar. Mit ihrer Hilfe werden die Wechselwirkung zwischen einem materiellen Körper und seiner Umgebung beschrieben. Sie sind materialunabhängig und können sowohl in integraler Form für den gesamten Körper als auch lokal für jeden materiellen Punkt angegeben werden.

### 2.3.1. Massebilanz

Während des Deformationsprozesses bleibt die Masse  $M$  eines materiellen Körpers konstant, d.h. die Masse ist eine Erhaltungsgröße und unterliegt keiner zeitlichen Änderung.

Der Masseerhaltungssatz lässt sich durch die Gleichung

$$M = \int_{V_0} \rho_0 \, dV_0 = \int_V \rho \, dV \quad (2.37)$$

ausdrücken, wobei  $\rho_0$  und  $\rho$  die Dichte in der Ausgangs- bzw. Momentankonfiguration bezeichnet. Da Gl. (2.37) für beliebige Integrationsbereiche gelten muss, kann der Massenerhaltungssatz in der lokalen Form mit

$$\rho_0 \, dV_0 = \rho \, dV \quad (2.38)$$

angegeben werden. Unter der Berücksichtigung von Gl. (2.11) folgt

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \det(\mathbf{F}) . \quad (2.39)$$

### 2.3.2. Impulsbilanz

Der Impulserhaltungssatz besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers gleich der Summe der angreifenden Kräfte ist. In der integralen Form kann der Impulserhaltungssatz bezüglich der Momentankonfiguration wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV = \int_V \rho \dot{\mathbf{v}} \, dV = \int_A \mathbf{t} \, dA + \int_V \rho \mathbf{k} \, dV . \quad (2.40)$$

Dabei bezeichnet  $\dot{\mathbf{v}}$  die Beschleunigung und  $\mathbf{k}$  die Massenkkräfte. Mit der Beachtung von Gl. (2.28) und dem GAUSSschen Integralsatz<sup>2</sup> ergibt sich die räumliche Gleichgewichtsbedingung

$$\int_V \rho \dot{\mathbf{v}} \, dV = \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \, dV + \int_V \rho \mathbf{k} \, dV \quad (2.41)$$

und die lokale Impulsbilanz

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{k} . \quad (2.42)$$

Durch die Transformation von Gl. (2.41) in die Ausgangskonfiguration erhält man unter Verwendung des 1. PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensors  $\mathbf{P}$  den Impulserhaltungssatz in der materiellen Darstellung

$$\int_{V_0} \rho_0 \dot{\mathbf{v}} \, dV_0 = \int_{V_0} \operatorname{div}(\mathbf{P}) \, dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{k} \, dV_0 \quad (2.43)$$

---

<sup>2</sup>siehe Anhang A

sowie die dazugehörige lokale Formulierung

$$\rho_0 \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div}(\mathbf{P}) + \rho_0 \mathbf{k}. \quad (2.44)$$

Beschränkt man sich auf statische Problemstellungen, dann kann die Beschleunigung  $\dot{\mathbf{v}}$  vernachlässigt werden und die lokale Gleichgewichtsbedingung lautet dann in der Momentankonfiguration

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{k} = 0 \quad (2.45)$$

bzw. in der Ausgangskonfiguration

$$\operatorname{div}(\mathbf{P}) + \rho_0 \mathbf{k} = 0. \quad (2.46)$$

### 2.3.3. Drehimpulsbilanz

Der Drehimpulserhaltungssatz lässt sich in der Momentankonfiguration bezüglich des Punktes 0 (vgl. Abbildung 2.1) wie folgt schreiben:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} \, dV = \int_A \mathbf{x} \times \mathbf{t} \, dA + \int_V \rho \mathbf{x} \times \mathbf{k} \, dV. \quad (2.47)$$

Er besagt, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses bezüglich des Punktes 0 gleich der Summe der von außen auf den Körper einwirkenden Momente ist. Nach einigen Zwischenrechnungen [80] folgt die Symmetrie des CAUCHYschen bzw. des 2. PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.48)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad (2.49)$$

sowie die Unsymmetrie des 1. PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensors

$$\mathbf{F} \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \mathbf{F}^T. \quad (2.50)$$

### 2.3.4. Hauptsätze der Thermodynamik

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik formuliert die Energiebilanz des Kontinuums. Demnach ist die zeitliche Änderung der totalen Energie  $E_t$  eines Körpers gleich der Summe aus der mechanischen Leistung  $P$  und der Wärmezufuhr  $Q$ :

$$\dot{E}_t = P + Q \quad (2.51)$$

Die totale Energie setzt sich dabei in der Momentankonfiguration mit

$$E_t = E_k + E_i = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_V \rho \tilde{u} \, dV \quad (2.52)$$

aus der kinetischen Energie  $E_k$  und der inneren Energie  $E_i$  zusammen. Hierbei ist  $\tilde{u}$  die spezifische innere Energie. Vernachlässigt man für adiabate Prozesse mit  $Q = 0$  die Wärmezufuhr, so kann die globale Energiebilanz

$$\dot{E}_t = \dot{E}_k + \dot{E}_i = P = \int_A \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, dA + \int_V \rho \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \, dV \quad (2.53)$$

formuliert werden. Dabei ist die Änderung der Gesamtenergie  $E_t$  gleich der Leistung der äußeren Oberflächen- und Volumenkräfte.

Mit der Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes und der materiellen Zeitableitung erhält man die lokale Form der Energieerhaltung

$$\rho \dot{\tilde{u}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{d} . \quad (2.54)$$

Bezogen auf die Ausgangskonfiguration ergibt sich für die Energiebilanz die Beziehung

$$\rho_0 \dot{\tilde{u}} = \mathbf{T} \cdot \cdot \dot{\mathbf{E}} . \quad (2.55)$$

Mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik können Aussagen über den thermodynamischen Zustand des Körpers und dessen zulässige Änderung getroffen werden. Die Entropieungleichung für isotherme Prozesse (Temperatur  $\vartheta = \text{const.}$ ) lautet in der globalen Form

$$\int_V \rho \dot{\eta} \, dV \geq 0 \quad (2.56)$$

und ist die Grundlage für eine physikalisch konsistente Formulierung der Materialgesetze. Hierbei ist  $\eta$  die Entropie, deren Änderung  $\dot{\eta} \geq 0$  nur im Idealfall reversibler Prozesse verschwindet.

Durch die Kombination der Beziehungen (2.54) und (2.56) sowie die Einführung der freien HELMHOLTZ-Energie

$$\psi = \tilde{u} - \vartheta \eta \quad (2.57)$$

erhält man die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung in der Momentankonfiguration

$$-\rho \dot{\psi} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{d} \geq 0 \quad (2.58)$$

bzw. in der Ausgangskonfiguration

$$-\rho_0 \dot{\psi} + \mathbf{T} \cdot \cdot \dot{\mathbf{E}} \geq 0 . \quad (2.59)$$



## 2.4. Materialgesetze

Die Materialgesetze, auch konstitutive Gleichungen genannt, sind mathematische Modelle, mit deren Hilfe das Verhalten realer Materialien beschrieben werden kann. Dabei stellen die Materialgleichungen einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verzerrungen her. Im Gegensatz zu den allgemeingültigen Bilanzgleichungen werden die Materialmodelle für ein bestimmtes Material sowie die zu beschreibenden Phänomene angepasst formuliert.

Im Wesentlichen basiert eine mathematisch und physikalisch sinnvolle Ableitung der Materialgesetze auf den folgenden Prinzipien:

- **Prinzip des Determinismus:**  
Es wird gefordert, dass der momentane Spannungszustand eines Körpers eindeutig durch die Deformationsgeschichte definiert ist.
- **Prinzip der materiellen Objektivität:**  
Die Beschreibung des Materialverhaltens muss unabhängig von der Wahl des Bezugssystems oder vom Bewegungszustand eines Beobachters sein. Das bedeutet, dass die Materialgleichungen gegenüber Starrkörpertranslationen und -rotationen invariant sind.
- **Prinzip der lokalen Wirkung:**  
Der Spannungszustand eines materiellen Punktes ist nur von der Deformationsgeschichte seiner unmittelbaren lokalen Umgebung abhängig. Durch diese Einschränkung wird ein so genanntes einfaches Material definiert.
- **Prinzip der thermodynamischen Konsistenz:**  
Die Materialgesetze müssen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik erfüllen.

### 2.4.1. Elastisches Materialverhalten

Das elastische Materialverhalten ist im Wesentlichen dadurch charakterisiert, dass die durch eine Belastung hervorgerufenen Verformungen reversibel sind, d.h. ein Körper geht nach der Entlastung in seine Ausgangsform zurück. Es existiert ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den aktuellen Spannungen und den elastischen Verzerrungen und die Deformationsgeschichte und -geschwindigkeit haben keinen Einfluss auf den erzielten Spannungszustand.

Für den Fall kleiner Deformationen nimmt man im Allgemeinen einen linearen Zusammenhang zwischen den Spannungen und den elastischen Verzerrungen an. Für ein anisotropes, linear elastisches Materialverhalten kann man diese Beziehung mit Hilfe der verallgemeinerten Form des HOOKEschen Gesetzes

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.60)$$

ausdrücken. Der Elastizitätstensor  $\mathbf{D}^e$  ist hierbei ein Tensor 4. Stufe, dessen 81 Komponenten infolge von Symmetrien auf 21 unabhängige Elastizitätskonstanten reduziert werden können. Mit der Annahme eines isotropen Materialverhaltens verringert sich dann die Anzahl auf zwei unabhängige Materialparameter und der Elastizitätstensor bestimmt sich mit

$$\mathbf{D}^e = D_{ijkl}^e = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2.61)$$

Die LAMÉschen Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  lassen sich dabei über die Beziehungen

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.62)$$

aus zwei Materialparametern, dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$ , berechnen.

Für hyperelastisches Materialverhalten erfolgt die Betrachtung über ein elastisches Potential  $\tilde{W}$ , das die im Körper gespeicherte Verzerrungsenergie beschreibt. In der Ausgangskonfiguration erhält man mit der partiellen Ableitung von  $\tilde{W}$  nach dem GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensor den 2. PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensor

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \tilde{W}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \quad (2.63)$$

Im Rahmen der nichtlinearen Kontinuumsmechanik erfolgt die Formulierung des Materialgesetzes üblicherweise über die zeitliche Änderung der Größen, so dass die materielle Zeitableitung von Gl. (2.63) den Zusammenhang

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{\partial^2 \tilde{W}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} \cdot \cdot \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{D}^{\text{hyp}} \cdot \cdot \dot{\mathbf{E}} \quad (2.64)$$

liefert. Mit  $\mathbf{D}^{\text{hyp}}$  wird hier die hyperelastische Materialtangente bezeichnet.

Ein einfaches lineares isotropes hyperelastisches Material stellt das ST.VENANT-KIRCHHOFF-Modell dar, das einer sinngemäßen Übertragung des HOOKEschen Gesetzes entspricht. Das dazugehörige elastische Potential wird mit

$$\tilde{W}(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2} \text{tr}^2(\mathbf{E}) + \mu \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{E} \quad (2.65)$$

angegeben und entsprechend Gl. (2.64) wird mit

$$\mathbf{D}^{\text{hyp}} = \frac{\partial^2 \tilde{W}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{I}^{[4]} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.66)$$

die hyperelastische Materialtangente, die mit dem Elastizitätstensor in Gl. (2.61) identisch ist, bestimmt.  $\mathbf{I}^{[4]}$  bezeichnet hier den Einheitstensor 4. Stufe.

Im Folgenden sollen die Betrachtungen auf ein allgemeines nichtlineares isotropes Materialverhalten eingeschränkt werden. Damit lässt sich das elastische Potential  $\tilde{W}(\mathbf{E})$  in alleiniger Abhängigkeit von den Invarianten des Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  schreiben:

$$\tilde{W}(\mathbf{E}) = \tilde{W}(I_{\mathbf{E}}, II_{\mathbf{E}}, III_{\mathbf{E}}). \quad (2.67)$$

Mit der Differenzierung nach dem Tensor  $\mathbf{E}$  erhält man unter Anwendung der Kettenregel den Zusammenhang

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial I_{\mathbf{E}}} \frac{dI_{\mathbf{E}}}{d\mathbf{E}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_{\mathbf{E}}} \frac{dII_{\mathbf{E}}}{d\mathbf{E}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_{\mathbf{E}}} \frac{dIII_{\mathbf{E}}}{d\mathbf{E}}. \quad (2.68)$$

Nach einigen Ersetzungen<sup>3</sup> folgt für den allgemeinen Fall eines hyperelastischen isotropen Materials die Beziehung für den 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor mit

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial I_{\mathbf{E}}} \mathbf{I} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_{\mathbf{E}}} (I_{\mathbf{E}} \mathbf{I} - \mathbf{E}) + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_{\mathbf{E}}} (II_{\mathbf{E}} \mathbf{I} - I_{\mathbf{E}} \mathbf{E} + \mathbf{E}^2). \quad (2.69)$$

Analog lässt sich das Potential  $\tilde{W}$  und damit auch der Spannungstensor  $\mathbf{T}$  in Abhängigkeit des rechten CAUCHY-GREEN-Deformationstensors bzw. seiner Invarianten formulieren:

$$\mathbf{T} = 2 \frac{\partial \tilde{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left[ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial I_{\mathbf{C}}} \mathbf{I} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial II_{\mathbf{C}}} (I_{\mathbf{C}} \mathbf{I} - \mathbf{C}) + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial III_{\mathbf{C}}} III_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} \right]. \quad (2.70)$$

Ein so genanntes kompressibles NEO-HOOKE-Material, welches nur von zwei Materialparametern abhängt, kann dann über das elastische Potential

$$\tilde{W}(I_{\mathbf{C}}, \mathcal{J}) = \frac{\mu}{2} (I_{\mathbf{C}} - 2 \ln(\mathcal{J}) - 3) + \frac{\lambda}{2} \ln^2(\mathcal{J}) \quad (2.71)$$

definiert werden, wobei  $\mathcal{J}^2 = III_{\mathbf{C}}$  ist. Die konstitutive Beziehung für den 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor ergibt sich durch das Einsetzen des elastischen Potentials aus Gl. (2.71) in Gl. (2.70):

$$\mathbf{T} = \mu (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda \ln(\mathcal{J}) \mathbf{C}^{-1}. \quad (2.72)$$

---

<sup>3</sup>siehe Anhang A

Mit der partiellen Ableitung des Spannungstensors  $\mathbf{T}$  nach dem Deformationstensor  $\mathbf{C}$  berechnet sich die dazugehörige hyperelastische Materialtangente

$$\mathbf{D}^{\text{hyp}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{C}} = (\mu - \lambda \ln \mathcal{J}) \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{I}^{[4]} \cdot \mathbf{C}^{-1} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}. \quad (2.73)$$

Zwei weitere Potentiale für das NEO-HOOKE-Material, die daraus abgeleiteten Spannungsbeziehungen und hyperelastischen Materialtangente sind in [126] zu finden.

### 2.4.2. Elasto-plastisches Materialverhalten

Das plastische Materialverhalten ist dadurch gekennzeichnet, dass nach Überschreiten einer materialabhängigen Beanspruchungsgrenze, die so genannte Elastizitätsgrenze, der Werkstoff zu fließen beginnt. Dabei treten bleibende inelastische Verformungen auf. Der Spannungs- und Verzerrungszustand hängt von der Belastungsgeschichte ab und der Zusammenhang zwischen den Spannungen und Dehnungen ist nicht mehr eindeutig. Der gesamte plastische Deformationsprozess ist dissipativ und irreversibel.

Die Basis für die kinematische Beschreibung des elasto-plastischen Verhaltens ist mit

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (2.74)$$

die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten [73, 119], wobei  $\mathbf{F}^e$  und  $\mathbf{F}^p$  den elastischen bzw. plastischen Anteil der Deformation beschreibt. Durch die Zerlegung von  $\mathbf{F}$  wird eine spannungsfreie plastische Zwischenkonfiguration festgelegt, die durch eine fiktive lokale elastische Entlastung entsteht (siehe Abbildung 2.2). Im Allgemeinen ist diese Zwischenkonfiguration geometrisch nicht kompatibel.

Anhand der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten können dann der elastische und der plastische Anteil des rechten CAUCHY-GREEN-Deformationstensors mit

$$\tilde{\mathbf{C}}^e = (\mathbf{F}^e)^T \cdot \mathbf{F}^e, \quad \mathbf{C}^p = (\mathbf{F}^p)^T \cdot \mathbf{F}^p \quad (2.75)$$

definiert werden. Der elastische Anteil  $\tilde{\mathbf{C}}^e$  ist hierbei ein Tensor auf der Zwischenkonfiguration.

Die Beschreibung der plastischen Deformationsvorgänge erfolgt auf der Basis der speziellen freien Energie  $\psi$ , welche sich mit

$$\psi = \psi_e(\mathbf{C} - \mathbf{C}^p) + \psi_p(\mathcal{A}) = \psi_e(\mathbf{E}^e) + \psi_p(\mathcal{A}), \quad (2.76)$$

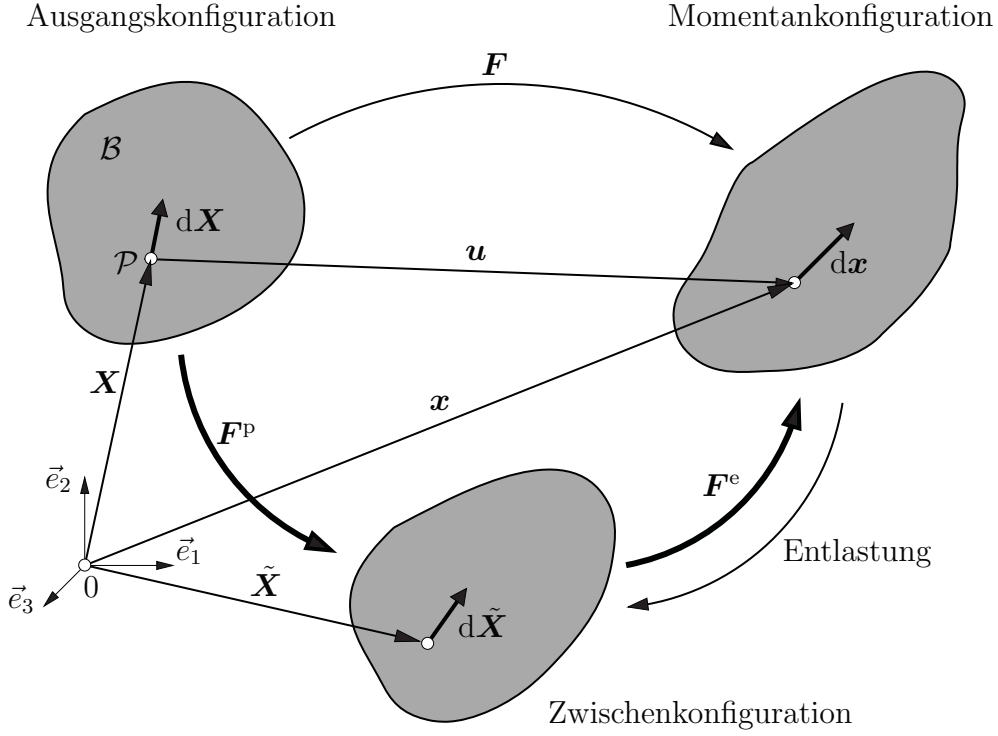


Abbildung 2.2.: Ausgangs-, Zwischen- und Momentankonfiguration

additiv aus einem elastischen und plastischen Anteil zusammensetzt [140]. Der elastische Anteil  $\psi_e$  ist hierbei durch die Beziehung

$$\psi_e = \frac{1}{\rho_0} \tilde{W} \quad (2.77)$$

mit dem elastischen Potential  $\tilde{W}$  gekoppelt. Im plastischen Anteil  $\psi_p$  werden durch innere Variablen die dissipativen Prozesse erfasst, welche bei den inelastischen Deformationen auftreten. Diese skalar-, vektor- bzw. tensorwertigen Variablen werden in Gl. (2.76) durch die Größe  $\mathcal{A}$  zusammengefasst.

Durch das Einsetzen von Gl. (2.76) in die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung (2.59) erhält man den Ausdruck<sup>4</sup>

$$-\rho_0 \left\{ \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{E}^e} \cdot \dot{\mathbf{E}}^e + \frac{\partial \psi_p}{\partial \mathcal{A}} \circ \dot{\mathcal{A}} \right\} + \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \geq 0, \quad (2.78)$$

aus dem sich mit  $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p$  ein hyperelastisches Materialgesetz

$$\mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{E}^e} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \mathbf{E}^e} \quad (2.79)$$

<sup>4</sup>Das Zeichen  $\circ$  steht als Platzhalter für die noch unbekannte Multiplikationsoperation, welche von der Art der inneren Variablen  $\mathbf{A}$  und  $\mathcal{A}$  abhängt.

abspalten lässt. Die verbleibenden Terme bilden die Dissipationsungleichung

$$\mathcal{D} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}^p - \rho_0 \frac{\partial \psi_p}{\partial \mathbf{A}} \circ \dot{\mathbf{A}} > 0, \quad (2.80)$$

nach der bei irreversiblen Prozessen die dissipierte Energie  $\mathcal{D}$  stets größer Null ist [79]. Definiert man die zu den inneren Variablen  $\mathbf{A}$  gehörenden arbeitskonjugierten spannungsähnlichen Variablen mit

$$\mathbf{A} = -\rho_0 \frac{\partial \psi_p}{\partial \mathbf{A}}, \quad (2.81)$$

so kann die Dissipationsungleichung auch als

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{C}}^p + \mathbf{A} \circ \dot{\mathbf{A}} > 0 \quad (2.82)$$

geschrieben werden und stellt eine zusätzliche Annahme zum Deformationsverlauf dar.

Als Kriterium für das Auftreten plastischer Deformationsprozesse wird die so genannte Fließbedingung

$$Y(\mathbf{T}, \mathbf{A}) = 0 \quad (2.83)$$

eingeführt, die im Allgemeinen von den Spannungen und den spannungsähnlichen inneren Variablen abhängt. Durch die Fließbedingung (2.83) wird im Spannungsraum eine konvexe Grenzfläche, die Fließfläche, definiert, welche den elastischen Bereich umschließt. Eine plastische Zustandsänderung verläuft dabei immer auf der Fließfläche, niemals außerhalb. Beim Erfüllen der Fließbedingung werden dann für jeden Deformationszustand die Spannungen und inneren Variablen so eingestellt, dass die Dissipation maximal wird [119]. Aus der Dissipationsungleichung (2.82) und der Fließbedingung (2.83) folgt dann das zum Postulat der maximalen Dissipation zusammengefasste und mit Hilfe der Methode der LAGRANGE-Multiplikatoren formulierte Extremwertproblem

$$\mathcal{F}|_{Y=0} = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{C}}^p + \mathbf{A} \circ \dot{\mathbf{A}} - \dot{\lambda} Y(\mathbf{T}, \mathbf{A}) \rightsquigarrow \max_{(\mathbf{T}, \mathbf{A})}. \quad (2.84)$$

Das Extremwertproblem wird dann gelöst, indem die partiellen Ableitungen nach den gesuchten Größen  $(\mathbf{T}, \mathbf{A})$  gebildet und zu Null gesetzt werden:

$$\dot{\mathbf{C}}^p = 2\dot{\lambda} \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{T}} \quad (2.85)$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\lambda} \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{A}}. \quad (2.86)$$

Der skalare Faktor  $\dot{\lambda}$  bezeichnet hierbei den LAGRANGESchen oder plastischen Multiplikator, für den man die folgenden Fälle unterscheiden kann:

- $\dot{\lambda} = 0$  (für  $Y \leq 0, \dot{Y} < 0$ ): elastischer Bereich bzw. Entlastung,
- $\dot{\lambda} > 0$  (für  $Y = 0, \dot{Y} = 0$ ): plastisches Fließen.

Diese Fallunterscheidung lässt sich in der sogenannten KUHN-TUCKER-Bedingung

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad Y \leq 0, \quad \dot{\lambda} Y = 0 \quad (2.87)$$

zusammenfassen. Das dann aus den Gl. (2.85), (2.86) und der Bedingung (2.87) gebildete differential-algebraische Gleichungssystem

$$\dot{\mathbf{C}}^p - 2\dot{\lambda} \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{T}} = 0 \quad (2.88)$$

$$\dot{\mathbf{A}} - \dot{\lambda} \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{A}} = 0 \quad (2.89)$$

$$\dot{\lambda} Y = 0 \quad (2.90)$$

stellt die Evolutionsgleichungen der finiten Elasto-Plastizität dar und kann mit Hilfe eines Zeitdiskretisierungsverfahren numerisch gelöst werden [53, 125]. Als Lösung erhält man den plastischen Anteil des rechten CAUCHY-GREEN-Deformationstensors  $\mathbf{C}^p$ , die inneren Variablen  $\mathbf{A}$  und den plastischen Multiplikator  $\dot{\lambda}$ .

Über das hyperelastische Materialgesetz (2.72) erhält man aus den Gesamtdeformationen und den plastischen Deformationen die 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen

$$\mathbf{T} = \mu (\mathbf{I} - \mathbf{B}) + \lambda \ln(\mathcal{J}) \mathbf{B}, \quad (2.91)$$

mit der Inversen des elastischen Deformationsanteils  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{C} - \mathbf{C}^p)^{-1}. \quad (2.92)$$

Für den elasto-plastischen Fall berechnet sich dann über die partielle Ableitung der Spannungen nach den Gesamtdeformationen die hyperelastische Materialtangente

$$\mathbf{D}^{\text{hyp}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{C}} = \left[ \mu - \lambda \ln(\mathcal{J}) \right] \mathbf{B} \cdot \mathbf{I}^{[4]} \cdot \mathbf{B} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \quad (2.93)$$

und mit der vollständigen Ableitung der Spannungen nach den Deformationen erhält man die materielle Tangente [125]

$$\mathbf{D}^m = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{C}} - \frac{\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{C}} \cdots \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{T}} \otimes \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{T}} \cdots \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{C}}}{\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{T}} \cdots \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{C}} \cdots \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{T}} - \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{A}} \cdots \dot{\mathbf{A}}}. \quad (2.94)$$

Unter der Annahme eines isotropen plastischen Materialverhaltens kann die Fließbedingung

$$Y = Y(I_T, II_T, III_T, \mathbf{A}) \quad (2.95)$$

in Abhängigkeit von den drei Invarianten des Spannungstensors und den inneren Variablen geschrieben werden. Ein oft verwendetes und einfaches Modell zur Beschreibung plastischen Fließens isotroper Materialien ist die VON-MISES-Fließbedingung

$$Y = \Sigma_V - \sigma_Y = 0. \quad (2.96)$$

Hierbei ist  $\Sigma_V$  die VON-MISES-Vergleichsspannung

$$\Sigma_V = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{T}^D \cdot \mathbf{T}^D} = \sqrt{-3 II_{T^D}}, \quad (2.97)$$

mit dem Spannungsdeviator

$$\mathbf{T}^D = \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{C})\mathbf{C}^{-1} \quad (2.98)$$

und seiner zweiten Invarianten  $II_{T^D}$ . Durch die VON-MISES-Vergleichsspannung wird hierbei ein mehrachsiger Spannungszustand auf einen vergleichbaren einachsigen Spannungswert aus dem Zugversuch abgebildet und der Spannungsdeviator ist der um den hydrostatischen Anteil reduzierte Spannungstensor. Die Fließspannung  $\sigma_Y$  ist für idealplastisches Material eine Materialkonstante.

Zur Modellierung von isotrop verfestigendem Material wird mit

$$\varepsilon_V^p = \int \dot{\varepsilon}_V^p dt, \quad \dot{\varepsilon}_V^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{E}}^p \cdot \dot{\mathbf{E}}^p} \quad (2.99)$$

und der plastischen Dehnungsgeschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}}^p \quad (2.100)$$

eine akkumulierte plastische Vergleichsdehnung  $\varepsilon_V^p \triangleq \mathcal{A}$  als innere Variable definiert, welche die gesamte plastische Dehnungsgeschichte in einem materiellen Punkt beschreibt. Die aktuelle Fließspannung kann dann mit

$$\sigma_Y(\varepsilon_V^p) = \sigma_0 + R_\sigma(\varepsilon_V^p) \quad (2.101)$$

in Abhängigkeit von der plastischen Vergleichsdehnung angegeben werden. Die Bestimmung der Anfangsfließspannung  $\sigma_0$  und der Verfestigungsfunktion  $R_\sigma(\varepsilon_V^p)$  erfolgt im Allgemeinen experimentell.

Durch die VON-MISES-Fließbedingung (2.96) wird im Hauptspannungsraum eine zylinderförmige Fließfläche erzeugt, deren Symmetriellängsachse mit der hydrostatischen Achse ( $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33}$ ) zusammenfällt. Mit zunehmender Verfestigung wächst die Fließspannung und es kommt dabei zu einer radialen Aufweitung der Fließfläche.



### 3. Bruchmechanische Grundlagen

Die Bruchmechanik als Wissenschaft befasst sich mit dem Verhalten rissbehafteter Körper unter statischen und dynamischen Belastungen. Aus Sicht der Kontinuumsmechanik stellt der Riss einen Schnitt in einem kontinuierlichen Körper dar. Die gegenüberliegenden Berandungen bilden dabei die Rissufer (räumlich: Rissoberfläche) und werden in der Regel als belastungsfrei angesehen. Der Riss endet an der Rissspitze (räumlich: Rissfront). Die Ausbreitung eines Risses bedeutet die Trennung von Materialbindungen.

Die Region in der Umgebung der Rissspitze, in welcher dieser mikroskopisch komplexe Prozess der Bindungslösung stattfindet, nennt man die Prozesszone. Die Vorgänge in der Prozesszone können in der Regel nicht mit den Mitteln der klassischen Kontinuumsmechanik beschrieben werden, weswegen die Ausdehnung der Prozesszone vernachlässigbar klein sein sollte.

Man unterscheidet drei verschiedene Rissöffnungsarten in Abhängigkeit von den Belastungsrichtungen (siehe Abbildung 3.1):

- Modus I: Zugbelastungen senkrecht zur Rissoberfläche (Rissöffnung),
- Modus II: Schubbelastung in Richtung der Rissausbreitung (Längsscherung),
- Modus III: Torsionsbelastung senkrecht zur Rissoberfläche (Querscherung).

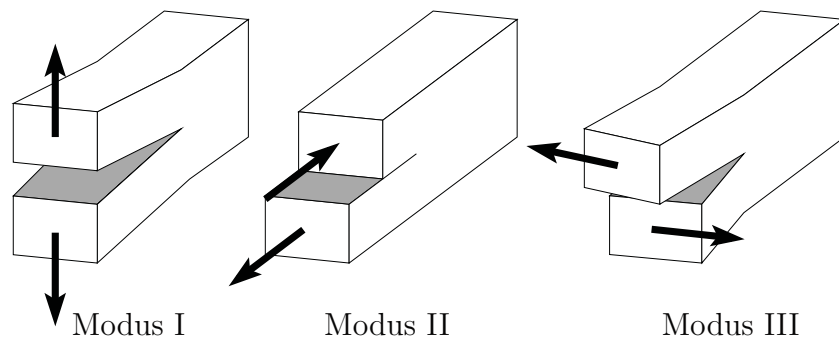


Abbildung 3.1.: Die drei Grundbeanspruchungsarten am Riss

Der am häufigsten betrachtete Fall und die für die Praxis wichtigste Beanspruchungsart ist der Modus I. In der Realität treten die unterschiedlichen Rissöffnungsarten allerdings nicht isoliert auf, sondern überlagern sich bei komplexen Belastungsfällen. In der lineareren Elastizitätstheorie kann hierbei das Superpositionsprinzip angewandt werden, welches eine getrennte Untersuchung der Rissöffnungsmodi erlaubt.

In der klassischen linear-elastischen Bruchmechanik (LEBM) [4, 50] wird der den makroskopischen Riss umgebende Werkstoff als homogen und linear elastisch angenommen. Die an der Rissspitze herrschenden Spannungs- und Verzerrungsfelder sind maßgeblich für das Rissverhalten, welches mit Hilfe bruchmechanischer Konzepte untersucht wird. Unter Umständen auftretende inelastische Vorgänge um die Rissspitze (inner- oder außerhalb der Prozesszone) müssen auf eine sehr kleine Region beschränkt sein, die aus makroskopischer Sicht vernachlässigt werden kann. Zur Beschreibung der Rissbeanspruchung haben sich das Konzept der Spannungsintensitätsfaktoren sowie das J-Integral-Konzept etabliert.

Mit der elastisch-plastischen Bruchmechanik (EPBM) [50] werden auch plastische Verformungen in der Umgebung von Rissen in duktilem Material berücksichtigt. Die gebräuchlichsten Parameter zur Beschreibung des Rissspitzenzustandes sind einerseits das J-Integral in der Bedeutung eines Verformungsintensitätsfaktors sowie die Rissspitzenöffnung (CTOD) als ein Maß für den plastischen Deformationszustand.

Die folgenden Betrachtungen beschränken sich auf eine statische Problemstellung, den ebenen Verzerrungszustand (EVZ) sowie auf linear-elastisches Materialverhalten.

### 3.1. Spannungsintensitätsfaktoren

In der linear-elastischen Bruchmechanik stellt die scharfe Rissspitze bei isotropem elastischen Materialverhalten aus kontinuumsmechanischer Sicht eine Singularität dar. Die Spannungen und Verzerrungen haben in der Nähe der Rissspitze<sup>1</sup> einen asymptotischen Verlauf und werden theoretisch an der Rissspitze unendlich groß. Durch das Konzept der Spannungsintensitätsfaktoren erhält man eine einfache Möglichkeit, die lokale Beanspruchung an der Rissspitze zu charakterisieren. Hierbei stellt der Spannungsintensitätsfaktor ein Maß für die Intensität des Spannungsfeldes in der unmittelbaren Rissspitzenumgebung dar und ist als eine skalare Größe von der äußeren Belastung sowie von der Riss- und der Bauteilgeometrie abhängig. Jedem Rissöffnungsmodus ist ein entsprechender Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$ ,  $K_{II}$  bzw.  $K_{III}$  zugeordnet. Da das Geschehen an der Rissspitze einzig durch die Asymptotik der Spannungs-Felder gesteuert wird, kann das

---

<sup>1</sup>Der Abstand von der Rissspitze ist ein Vielfaches kleiner als die Risslänge.

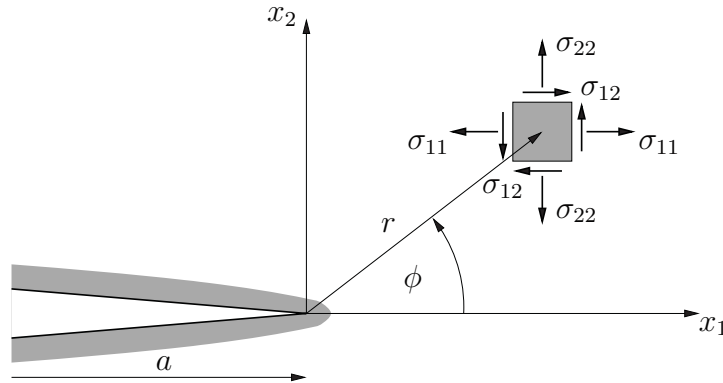


Abbildung 3.2.: Spannungen an der Rissspitze in kartesischen Koordinaten ( $r \ll a$ )

bruchmechanische Verhalten mit dem jeweiligen K-Faktor vollständig erfasst werden. Zur Bestimmung der K-Faktoren existieren eine Reihe analytischer, numerischer und experimenteller Methoden [24, 70].

Für ebene Problemstellungen sind hier nur der Modus I und Modus II von Interesse und der Einfluss von  $K_{\text{III}}$  wird vernachlässigt. Die K-Faktoren  $K_{\text{I}}$  und  $K_{\text{II}}$  lassen sich dann mit

$$\begin{pmatrix} K_{\text{I}} \\ K_{\text{II}} \end{pmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \begin{pmatrix} \sigma_{22}(r, \phi = 0) \\ \sigma_{12}(r, \phi = 0) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

aus dem Spannungsfeld vor der Rissspitze bestimmen (siehe Abbildung 3.2). Eine einfache Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren ist für bekannte Risskonfigurationen in der Form

$$\begin{pmatrix} K_{\text{I}} \\ K_{\text{II}} \end{pmatrix} = \sigma \sqrt{\pi a} \begin{pmatrix} Y_{\text{I}} \\ Y_{\text{II}} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

möglich. Hierbei ist  $\sigma$  eine allgemeine äußere Belastung und  $Y_{\text{I}}$  bzw.  $Y_{\text{II}}$  eine dimensionslose Korrekturfunktion, welche den Einfluss der Geometrie und Belastung am Riss sowie des Materials berücksichtigt. Die Korrekturfunktion ist für viele Standard-Risskonfigurationen in entsprechenden Handbüchern (z.B. [89]) zu finden.

Mit Hilfe der bekannten K-Faktoren lassen sich die asymptotischen Nahfelder an einer

scharfen Rissspitze berechnen. Hierbei ist die Form der Nahfeldlösung

$$\sigma_{ij}(r, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I f_{ij}^I(\phi) + K_{II} f_{ij}^{II}(\phi) \right] \quad (3.3)$$

$$u_i(r, \phi) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ K_I g_{ij}^I(\phi) + K_{II} g_{ij}^{II}(\phi) \right] \quad (3.4)$$

für alle Risskonfigurationen identisch, d.h. sie ist unabhängig von der äußeren Geometrie und Belastung.  $f_{ij}^I(\phi)$ ,  $f_{ij}^{II}(\phi)$ ,  $g_{ij}^I(\phi)$  und  $g_{ij}^{II}(\phi)$  sind hier dimensionslose Funktionen des Polarwinkels  $\phi$ . Für den ebenen Verzerrungszustand lassen sich die dem Rissöffnungsmodus entsprechenden Nahfelder für die Spannungen und Verschiebungen somit in der folgenden Form für den Modus I

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{3}{2}\phi\right) \right] \\ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \left[ 1 + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{3}{2}\phi\right) \right] \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{3}{2}\phi\right) \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \left[ \kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \left[ \kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

und den Modus II

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \left[ 2 + \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{3}{2}\phi\right) \right] \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{3}{2}\phi\right) \\ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{3}{2}\phi\right) \right] \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \left[ \kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \\ -\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \left[ \kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

mit  $\kappa = 3 - 4\nu$  darstellen [4].

Erreicht der K-Faktor (Rissbeanspruchung) einen kritischen materialspezifischen Wert, den Bruchwiderstand des Werkstoffes, setzt das Risswachstum ein. Für den Beginn der Rissausbreitung im Modus I ist dieser Kennwert die Bruchzähigkeit  $K_{Ic}$  und das Bruchkriterium lautet

$$K_I = K_{Ic} \quad (3.9)$$

Für den reinen Mode II bzw. Mode III lassen sich dementsprechend mit  $K_{IIc}$  und  $K_{IIIc}$  ebenfalls einparametrische Bruchkriterien aufstellen, welche aber in der Praxis eine untergeordnete Rolle spielen. Für eine gemischte Beanspruchung (Mixed Mode) durch  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$  muss hingegen ein allgemeines Bruchkriterium in der Form

$$g(K_I, K_{II}, K_{III}) = 0 \quad (3.10)$$

gefunden werden.

Das Konzept der Spannungsintensitätsfaktoren kann für linear-elastisches Materialverhalten und bei kleinen plastischen Verformungen an der Rissspitze angewandt werden, solange das elastische Spannungsfeld die Asymptotik an der Rissspitze bestimmt (Kleinhinbereichsfließen). Bei ausgedehnten Plastifizierungen vor der Rissspitze stimmen die Spannungen nicht mehr mit der Lösung in Gl. (3.5) und (3.7) überein und das Konzept kann im Rahmen der LEBM nicht mehr angewandt werden.

## 3.2. J-Integral

Ein weiterer Parameter zur Beschreibung der Rissbeanspruchung ist das durch CHEREPANOV [36] und RICE [106] eingeführte J-Integral. Für ebene Probleme lässt sich dieses Integral als Konturintegral formulieren und man erhält den J-Integral-Vektor

$$\mathbf{J} = J_i \vec{e}_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.11)$$

mit

$$J_i = \int_{\Gamma} (U \delta_{ij} - \sigma_{kj} u_{k,i}) n_j \, ds. \quad (3.12)$$

$\Gamma$  ist hier eine geschlossene, die Rissspitze einschließende Kontur mit dem Normalenvektor  $n_j$  (siehe Abbildung 3.3).  $U$  ist die Formänderungsenergiedichte, die für den Fall eines linear-elastischen Materials mit

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (3.13)$$

angegeben werden kann.

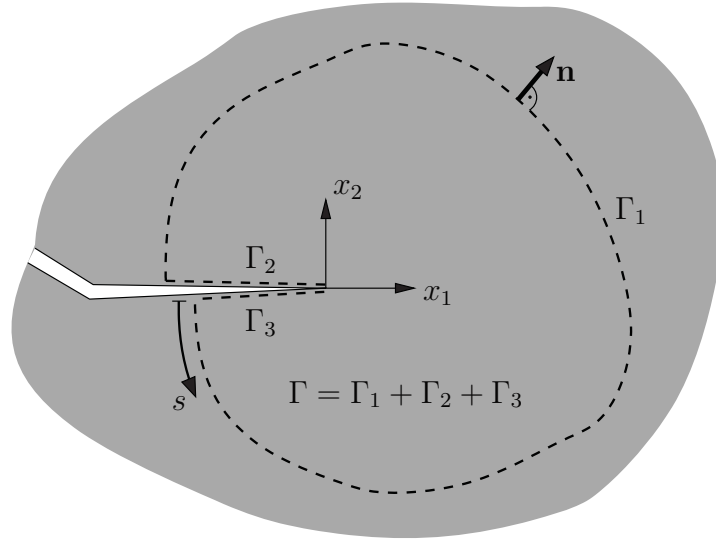


Abbildung 3.3.: J-Integral-Kontur am Riss

Die besondere Bedeutung des J-Integral-Vektors in der Bruchmechanik liegt hier in der Verwendung von  $J = J_1$  als ein Bruchparameter, welcher als J-Integral bezeichnet wird. Der Wert für  $J$  wird hierbei als die Energiefreisetzungsrate interpretiert, die mit einer fiktiven Rissverlängerung  $\Delta a$  in  $x_1$ -Richtung verbunden ist. Unter der Annahme zeitunabhängiger Prozesse, homogenem hyperelastischen Materialverhalten, kleinen Deformationen sowie geraden und spannungsfreien Rissufern, die parallel zu  $x_1$  verlaufen, verschwinden die Anteile des J-Integrals entlang der Konturen  $\Gamma_2$  bzw.  $\Gamma_3$  in Abbildung 3.3. Unter diesen Voraussetzungen ist das J-Integral wegunabhängig. Damit erhält man einen charakteristischen Parameter für den Beanspruchungszustand in der unmittelbaren Umgebung der Rissspitze, der in diesem Bereich unabhängig vom Verlauf der Kontur ist. Ein weiterer wichtiger Vorteil ist der Wegfall einer aufwändigen Berechnung der Feldgrößen an der Rissspitze beim Einsatz numerischer Methoden. Im Gegensatz zu  $J_1$  ist  $J_2$  in jedem Fall ein wegunabhängiger Parameter, wodurch seine numerische Bestimmung weitgehend erschwert wird.

In der linear-elastischen Bruchmechanik ist das J-Integral äquivalent zu den Spannungsintensitätsfaktoren. Die Komponenten des J-Integral-Vektors kann man in Abhängigkeit von  $K_I$  und  $K_{II}$  für den ebenen Verzerrungszustand mit

$$J = J_1 = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (3.14)$$

$$J_2 = -2 \frac{1 - \nu^2}{E} K_I K_{II} \quad (3.15)$$

angeben. Für eine reine Belastung im Modus I erhält man somit die Möglichkeit, den

$K_I$ -Faktor auf einfache Weise über das J-Integral mit

$$K_I = \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2}} J \quad (3.16)$$

zu berechnen. Analog zu  $K_{Ic}$  lässt sich ebenso ein Bruchkriterium in der Form

$$J = J_c \quad (3.17)$$

definieren, mit  $J_c$  als dem kritischen Materialkennwert.

Eine allgemeine Bestimmungsgleichung für  $K_I$  und  $K_{II}$  ist mit Hilfe des J-Integral-Vektors durch

$$K_{I,II} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2}} \left( \sqrt{J_1 - J_2} \pm \sqrt{J_1 + J_2} \right) \quad (3.18)$$

gegeben [87].

### 3.3. Interaction-Integral

Eine Anwendung des J-Integrals zur einfachen numerischen Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  und  $K_{II}$  für eine gemischte Beanspruchung ist in der Form der Interaction-Integral-Methode [20, 118, 131, 143] möglich. Man betrachtet dabei zwei unterschiedliche Belastungszustände an der Rissspitze:

- Zustand 1 entspricht der aktuellen numerischen Lösung  $\left\{ \sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)} \right\}$  und
- Zustand 2 entspricht einer beliebigen singulären asymptotischen Nahfeldlösung  $\left\{ \sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)} \right\}$ .

Die Nahfeldlösung aus Belastungszustand 2 wird der numerischen Lösung des Belastungszustandes 1 überlagert und das J-Integral für die Summe beider Zustände bestimmt sich mit Gl. (3.12) unter der Annahme von Gl. (3.13) dann zu

$$J_1^{(1+2)} = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} + \int_{\Gamma} \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \delta_{1k} - \sigma_{ik}^{(1)} u_{i,1}^{(2)} - \sigma_{ik}^{(2)} u_{i,1}^{(1)} \right] n_k \, ds. \quad (3.19)$$

Ebenso kann man die allgemeine Beziehung zwischen J-Integral und Spannungsintensitätsfaktoren in Gl. (3.14) für die Summe beider Belastungszustände aufschreiben. Man erhält

$$J_1^{(1+2)} = J_1^{(1)} + J_1^{(2)} + \frac{2(1-\nu^2)}{E} \left( K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \quad (3.20)$$

und durch Einsetzen von Gl. (3.19) in (3.20)

$$K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{E}{(1 - \nu^2)} \int_{\Gamma} [\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \delta_{1k} - \sigma_{ik}^{(1)} u_{i,1}^{(2)} - \sigma_{ik}^{(2)} u_{i,1}^{(1)}] n_k \, ds. \quad (3.21)$$

Das Integral

$$I^{12} = \int_{\Gamma} [\sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \delta_{1k} - \sigma_{ik}^{(1)} u_{i,1}^{(2)} - \sigma_{ik}^{(2)} u_{i,1}^{(1)}] n_k \, ds \quad (3.22)$$

wird dabei als Interaction-Integral bezeichnet. Mit der Bedingung  $K_{II}^{(2)} = 0$  folgt dann aus Gl. (3.21) die Bestimmungsgleichung für den gesuchten K-Faktor  $K_I^{(1)}$  mit

$$K_I^{(1)} = \frac{EI^{12}}{2K_I^{(2)}(1 - \nu^2)}. \quad (3.23)$$

Analog dazu erhält man mit Gl. (3.21) und der Bedingung  $K_I^{(2)} = 0$  die entsprechende Berechnungsvorschrift für  $K_{II}^{(1)}$  mit

$$K_{II}^{(1)} = \frac{EI^{12}}{2K_{II}^{(2)}(1 - \nu^2)}. \quad (3.24)$$

Hierzu muss das Interaction-Integral  $I^{12}$  entlang einer vorgegebenen Kontur im Berechnungsmodell bestimmt werden. Bezüglich der Berechnungskontur ist das Interaction-Integral ebenso wegunabhängig, falls für den Verlauf der Kontur als auch die Rissgeometrie an der Rissspitze die gleichen Voraussetzungen erfüllt sind wie für die Bestimmung des J-Integrals im vorhergehenden Abschnitt (vgl. Abbildung 3.3). Die Methode des Interaction-Integrals erlaubt somit eine sehr effektive und stabile numerische Bestimmung der K-Faktoren, da das direkte Nahfeld an der Rissspitze nicht ausgewertet werden muss.

Die entsprechenden Feldgrößen für den Zustand 1 müssen durch das numerische Verfahren bereitgestellt werden. Zur Festlegung der asymptotischen Hilfslösung des Zustandes 2 bieten sich für das Spannungsfeld die Gln. (3.5) und (3.7) an. Die benötigten Verschiebungsgradienten werden durch die entsprechenden Ableitungen der Verschiebungen in Gln. (3.6) und (3.8) bestimmt und man erhält für den Modus I



$$\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \frac{K_I \sqrt{2}}{16\mu \sqrt{r\pi}} \begin{pmatrix} -(8\nu - 3) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\phi\right) \\ -(8\nu - 7) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{5}{2}\phi\right) \\ (8\nu - 9) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{5}{2}\phi\right) \\ -(8\nu - 5) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\frac{5}{2}\phi\right) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

sowie für den Modus II

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \frac{K_{II} \sqrt{2}}{16\mu \sqrt{r\pi}} \begin{pmatrix} (8\nu - 7) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{5}{2}\phi\right) \\ -(8\nu - 11) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\phi\right) \\ (8\nu - 5) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\phi\right) \\ (8\nu - 1) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{5}{2}\phi\right) \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$



## 4. Schädigungsmechanische Grundlagen

Im Allgemeinen enthalten reale Materialien bereits im unbelasteten Zustand mikroskopische Defekte und Inhomogenitäten, welche die makroskopische Festigkeit des betreffenden Bauteils entscheidend beeinflussen können. Entsprechende metallografische Untersuchungen [94, 124, 127] haben gezeigt, dass in Metallen diese mikroskopischen Materialstörungen in Form von Mikrohohlräumen, Mikrorissen, Einschlüssen und Ausscheidungen auftreten. Die Anzahl, Größe sowie Verteilung dieser Mikrodefekte im so genannten Matrixmaterial, die eigentlich tragende Struktur, sind für die auftretenden mikromechanischen Schädigungsprozesse signifikant.

Wird das Bauteil durch eine äußere Belastung beansprucht, können sich diese Mikrohohlräume und Mikrorisse weiter vergrößern und letztendlich zusammenwachsen, während sich in Gegenden mit hoher Spannungskonzentration, z.B. an Einschlüssen, neue Mikrohohlräume bilden. Am Ende dieses Prozesses der Strukturschädigung im Werkstoff steht der vollständige Verlust der Materialbindung und es entsteht durch Materialtrennung ein makroskopischer Riss. In Abbildung 4.1 ist dieser Vorgang schematisch dargestellt.

Ausgehend von den dominierenden Mechanismen kann man die Werkstoffschädigung entsprechend klassifizieren [50]:

- **Spröde Schädigung:** Bildung und Wachstum von Mikrorissen, z.B. in Keramiken, Glas, Gestein
- **Duktile Schädigung:** Bildung, Wachstum und Vereinigung von Mikrohohlräumen, z.B. in metallischen Werkstoffen
- **Ermüdungsschädigung:** Entstehung und Ausbreitung von Mikrorissen aufgrund mikroplastischer Wechselbelastungen an Stellen hoher Spannungskonzentration.

Die Schädigungsmechanik hat im Rahmen der Kontinuumsmechanik die Aufgabe, die infolge der Werkstoffschädigung veränderten Materialeigenschaften einer Struktur zu beschreiben. Ziel ist es, die im Mikro- und Mesobereich ablaufenden Schädigungsvorgänge

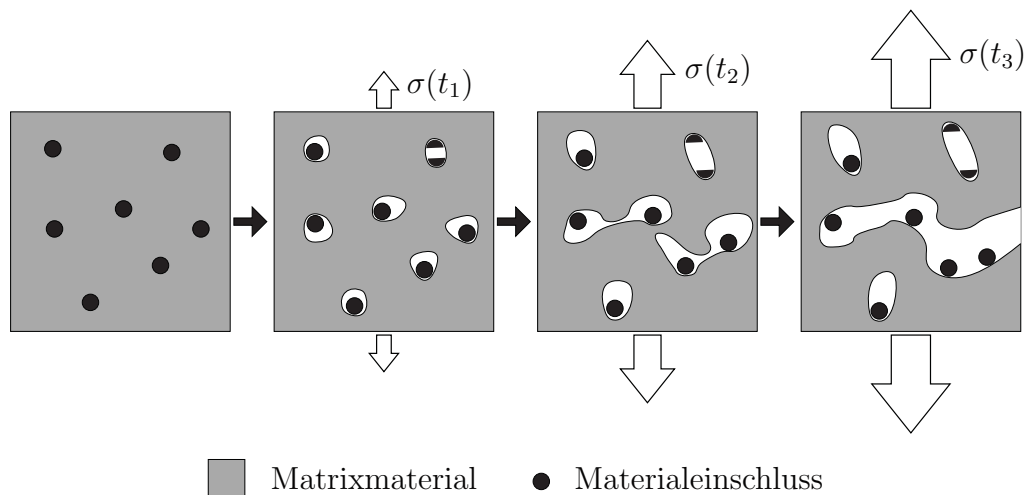


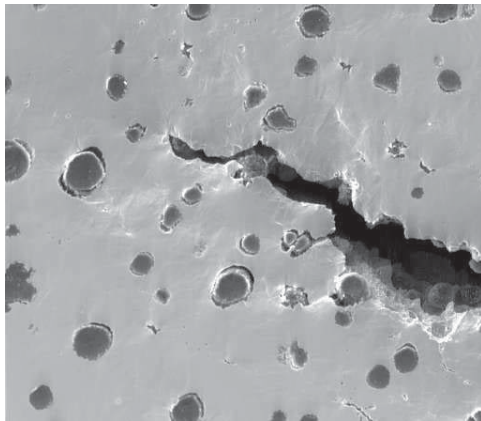
Abbildung 4.1.: Bildung, Wachstum und Koaleszenz von Hohlräumen

modellmäßig zu erfassen und durch geeignete Techniken der Homogenisierung auf der Makroebene zu betrachten. Zum besseren Verständnis dieser komplexen Vorgänge sind in der Regel gezielte Experimente sowie vergleichende numerische Simulationen erforderlich. Für eine detailliertere Darstellung der Schädigungsmechanik wird auf [74, 75, 76, 123] verwiesen.

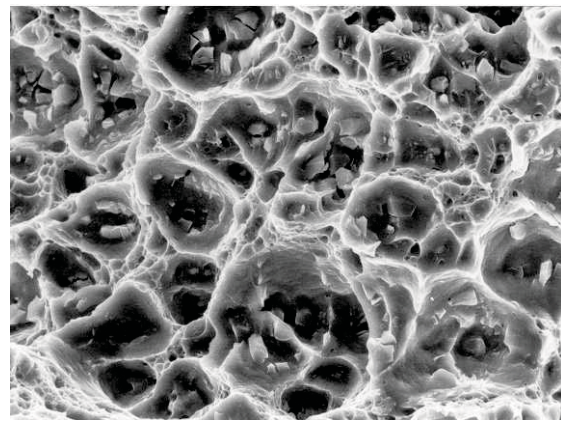
## 4.1. Duktile Schädigung

Die im Rahmen dieser Arbeit betrachtete duktile Schädigung wird im Wesentlichen durch die Phasen von Neubildung, Wachstum und Koaleszenz von Mikrohohlräumen charakterisiert. Für die üblichen technischen Metalle und Legierungen sind die mikroskopischen Schädigungsvorgänge überwiegend identisch und werden vor allem durch Ausscheidungen und Einschlüsse verursacht [117].

In der Regel entstehen neue mikroskopische Hohlräume an Partikeln einer zweiten Phase. In Abbildung 4.2a sind sehr gut die im Werkstoff GGG 40 eingelagerten, mikroskopisch kleinen Graphitkugeln zu sehen. Schon geringe makroskopische Verformungen können an solchen spröden Einschlüssen eine Spannungsüberhöhung und somit eine Plastifizierung des umgebenden duktilen Matrixmaterials bewirken [51]. In Abhängigkeit von Form und Material des Partikels kommt es dabei zur Trennung von der Matrix (Dekohäsion) oder zum Bruch des Teilchens [57]. Die anschließende Phase des Hohlraumwachstums hängt bei steigender Belastung von den auftretenden plastischen Deformationen im Matrixwerkstoff ab. Insbesondere der hydrostatische Spannungszustand hat einen sehr starken Einfluss auf die Geschwindigkeit des Hohlraumwachstums [105].



(a) Rissbildung in GGG 40



(b) Bruchfläche (AlMg4,5Mn)

Abbildung 4.2.: Duktile Schädigung<sup>1</sup>

Die letztendlich bei der Hohlraumvereinigung ablaufenden Prozesse sind stark vom verwendeten Werkstoff abhängig. Die drei wesentlichen Grundmechanismen sind dabei die Koaleszenz durch starke plastische Verformungen, die Koaleszenz durch Entstehung von Scherbändern sowie die Koaleszenz durch die Bildung von Sekundärhohlräumen an sehr kleinen Partikeln [117]. Für reale Werkstoffe überschneiden sich diese Mechanismen. Infolge der Vereinigung von Hohlräumen entstehen Mikrorisse, die sich wiederum zu Makrorissen zusammenschließen können, wodurch es schließlich zum Versagen des Materials kommt. Diese Vorgänge sind in Abbildung 4.2a sehr gut zu erkennen. Die Bruchfläche eines duktilen Bruchs, aufgrund des mikroskopischen Aussehens auch als Wabenbruch bezeichnet, ist in Abbildung 4.2b zu sehen.

## 4.2. Rousselier-Modell

Für die numerischen Simulation der duktilen Schädigung wird der mikrostrukturelle Zustand des Materials im wesentlichen durch eine Schädigungsvariable gekennzeichnet, die Bestandteil der kontinuumsmechanischen Beschreibung ist und den Satz der internen Zustandsvariablen ergänzt. Anstatt jeden einzelnen Mikrodefekt zu betrachten, wird die Defektdichte bzw. die mechanische Auswirkung der Mikrodefekte mittels dieser Schädigungsvariable ausgedrückt. Somit kann das Verhalten des Materials vom Ausgangszustand bis hin zum völligen Verlust der Tragfähigkeit ohne globale Versagenskriterien beschrieben werden. Das lokale Versagen wird durch das Schädigungsmodell festgelegt, so dass eine geometrie- und belastungsunabhängige Charakterisierung des Strukturversagens möglich ist.

<sup>1</sup>Bilder: Institut für Werkstofftechnik, TU Bergakademie Freiberg

Das klassische ROUSSELIER-Modell [110, 111] ist ein zur Beschreibung der duktilen Schädigung oft genutztes Materialmodell, welches auf einem thermodynamisch konsistenten Ansatz basiert und eine einfache Darstellung der mikromechanischen Abläufe gestattet. Bezogen auf die Ausgangskonfiguration lautet die Fließbedingung

$$Y = \Sigma_V + \hat{P}(\varepsilon_V^p) + \hat{B}(\beta)D \exp\left(-\frac{\Sigma_H}{\sigma_1}\right) = 0 \quad (4.1)$$

und stellt eine Erweiterung der VON-MISES-Fließbedingung (2.96) dar. Hierbei ist  $\hat{P}(\varepsilon_V^p)$  die konjugierte Kraftgröße ( $\mathbf{A}$ ) zur inneren Variable  $\varepsilon_V^p$  ( $\triangleq \mathbf{A}$ ) und steht mit

$$\hat{P}(\varepsilon_V^p) = -\sigma_{YM}(\varepsilon_V^p) \quad (4.2)$$

für den isotrop verfestigenden Anteil im Modell. Die Fließspannung des Matrixmaterials  $\sigma_{YM}$  wird im vorliegenden Fall als ein Potenzgesetz mit

$$\sigma_{YM}(\varepsilon_V^p) = \sigma_0 \left( \frac{\varepsilon_V^p}{\varepsilon_0} + 1 \right)^{n_\sigma} \quad (4.3)$$

modelliert [7]. Die Materialparameter  $\varepsilon_0$  und  $n_\sigma$  charakterisieren dabei den Verlauf der Verfestigung des Matrixmaterials mit  $\sigma_0$  als der Anfangsfließspannung.

Der dritte Term der Fließbedingung (4.1)

$$\hat{B}(\beta)D \exp\left(-\frac{\Sigma_H}{\sigma_1}\right) \quad (4.4)$$

repräsentiert den isotrop entfestigenden Anteil im Materialmodell. Mit

$$\Sigma_H = -\frac{1}{3}\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{C} \quad (4.5)$$

wird hierbei die hydrostatische Spannung bezeichnet. Die Materialparameter  $D$  und  $\sigma_1$  dienen zur Anpassung des Modells an die Ergebnisse experimenteller Beobachtungen. Die Schädigung im Modell wird durch die Funktion

$$\hat{B}(\beta) = \frac{\sigma_1 f_0 \exp(\beta)}{1 - f_0 + f_0 \exp(\beta)} \quad (4.6)$$

beschrieben und kann hier als die konjugierte Kraftgröße ( $\mathbf{A}$ ) zu der skalaren Schädigungsvariablen  $\beta$  ( $\triangleq \mathbf{A}$ ) angesehen werden. Mit  $f_0$  wird hier der Anfangshohlraumvolumenanteil bezeichnet. Der Hohlraumvolumenanteil  $f$  hängt mit der Schädigungsvariablen  $\beta$  über die Funktion

$$f = \frac{f_0 \exp(\beta)}{1 - f_0 + f_0 \exp(\beta)} \quad (4.7)$$

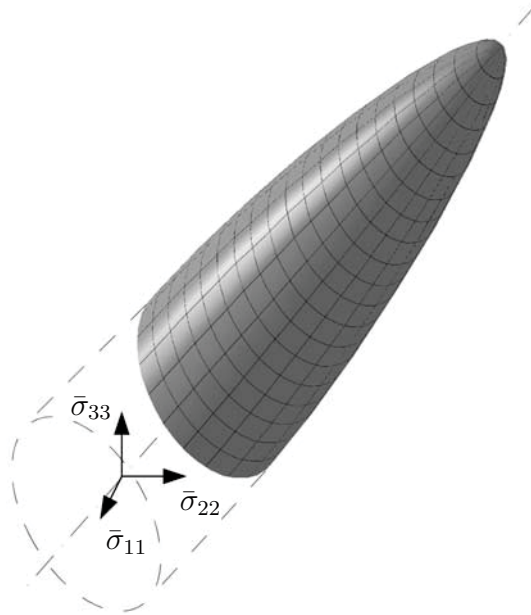


Abbildung 4.3.: Fließfläche des ROUSSELIER-Modells im Hauptspannungsraum

zusammen. Der aktuelle Schädigungszustand im Modell kann demzufolge auch über den momentanen Anteil des Hohlraumvolumens  $f$  beschrieben werden.

Für das ROUSSELIER-Modell lassen sich dann ausgehend von der allgemeinen Darstellung in Gl. (2.88) - (2.90) die Materialgleichungen als das folgende System algebraischer Differentialgleichungen formulieren:

$$\dot{C}^p - 2\dot{\lambda} \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{T}} = 0 \quad (4.8)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p - \dot{\lambda} \frac{\partial Y}{\partial \bar{P}} = 0 \quad (4.9)$$

$$\dot{\beta} - \dot{\lambda} \frac{\partial Y}{\partial \bar{B}} = 0 \quad (4.10)$$

$$\dot{\lambda} Y = 0 . \quad (4.11)$$

Die Evolutionsgleichungen für die inneren Variablen  $\varepsilon_v^p$  und  $\beta$  folgen aus Gl. (4.9) und (4.10) mit (4.1):

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\lambda} \quad (4.12)$$

$$\dot{\beta} = \dot{\lambda} D \exp \left( -\frac{\Sigma_H}{\sigma_1} \right) . \quad (4.13)$$

Die zur Fließbedingung (4.1) gehörende Fließfläche ist in der Abbildung 4.3 zu sehen

und stellt einen Rotationsparaboloid dar, dessen Symmetrieachse mit der hydrostatischen Achse ( $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33}$ ) zusammenfällt. Mit steigender Schädigung schrumpft die Fließfläche, um letztendlich bei totalem Versagen ( $f = 1$ ) nur noch aus einer halbumendlichen Linie zu bestehen.

Durch das klassische ROUSSELIER-Modell wird nur das Hohlraumwachstum beschrieben, nicht die Neubildung. Sind Materialeinschlüsse für die Initiierung von Hohlräumen dominierend, so entspricht das Anfangshohlraumvolumen näherungsweise dem Volumenanteil dieser Einschlüsse und kann z.B. aus der chemischen Zusammensetzung oder metallographisch bestimmt werden [110]. Für den Fall eines Werkstoffes mit dem Anfangshohlraumvolumenanteil  $f_0 = 0$  verschwindet der Schädigungsterm in Gl. (4.1). Eine Erweiterung des klassischen ROUSSELIER-Modells für die Hohlraumneubildung und beschleunigtes Hohlraumwachstum wurde in [125] vorgenommen.

### 4.3. Lokalisierung und akustischer Tensor

Infolge der Berücksichtigung des Schädigungsprozesses im ROUSSELIER-Modell wird in einem materiellen Punkt mit steigender Belastung das Material so weit verfestigt, bis die Spannungen einen Maximalwert erreichen. Danach nehmen die Spannungen mit wachsenden Verzerrungen wieder ab. Diese Entfestigung des Materials führt im Allgemeinen zu einem Stabilitätsproblem. Der Stabilitätsverlust ist durch die so genannte Bifurkation (Verzweigung) gekennzeichnet und besagt, dass die Lösung eines Problems nicht mehr eindeutig ist.

Für den eindimensionalen Fall ist das Verzweigungsproblem in Abbildung 4.4a illustriert. Solange das Material verfestigt, ist die Beziehung zwischen Spannung und Dehnung eindeutig. Mit dem Auftreten von Entfestigung kann es nach dem Überschreiten des Maximums im Spannungs-Dehnungs-Verlauf zur Verzweigung kommen. Es besteht sowohl die Möglichkeit elastisch zu entlasten (Pfad a) als auch die Fließspannung zu reduzieren (Pfad b). Einem Spannungszustand  $\sigma_{ab}$  können demzufolge zwei mögliche Dehnungszustände  $\varepsilon_a$  und  $\varepsilon_b$  zugeordnet werden. Für das Beispiel des in Längsrichtung belasteten Zugstabes in Abbildung 4.4b bedeutet das, dass der Verlauf der Längsdehnung nicht zwingend konstant ist und infolge des Stabilitätsverlustes auch nicht bestimmt werden kann. Es können sich in Anzahl und Ausdehnung beliebige Zonen ausbilden, in denen entweder eine elastische Entlastung oder eine plastische Entfestigung auftritt. Dieses Verhalten ist ebenso in komplexeren Strukturen für unterschiedliche Belastungsarten zu beobachten.

Die Instabilität führt zu einer Lokalisierung der Dehnungen [38]. Diese Dehnungslokalisierung verursacht eine weitere Entwicklung der Schädigung, welche wiederum den Lo-



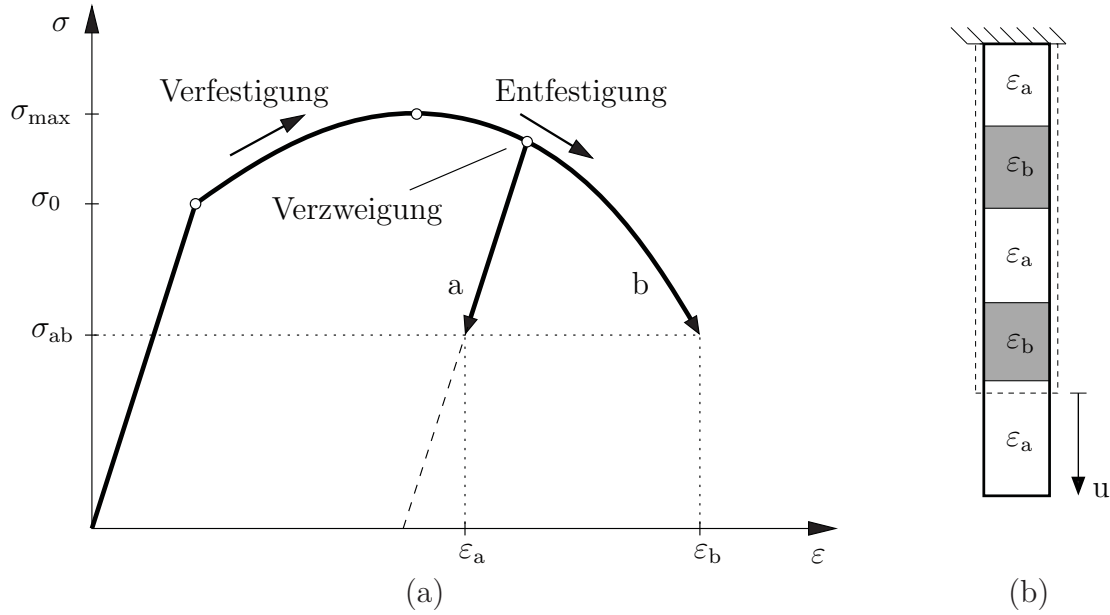


Abbildung 4.4.: Entfestigung im eindimensionalen Fall

kalisierungsprozess beschleunigt. Als Ergebnis dieser Interaktion zwischen Schädigung und Lokalisierung konzentrieren sich die lokalen Dehnungszuwächse in einem schmalen Bereich, der Lokalisierungszone genannt wird und z.B. in Form von Scherbändern in metallischen Werkstoffen beobachtet werden kann. Scherbänder sind eine Vorstufe für die makroskopische Rissbildung sowie dem anschließenden Bruch, so dass der Beginn der Lokalisierung im Allgemeinen als Auslöser für das Materialversagen angesehen werden kann.

Sowohl das lokale als auch das globale Verhalten einer belasteten Struktur werden im Wesentlichen durch die Vorgänge in der Lokalisierungszone bestimmt. Im Rahmen der Plastizitätstheorie und Schädigungsmechanik wurden durch Stabilitäts- und Verzweigungsanalysen die Prozesse beschrieben, welche zu einer Lokalisierung führen [21, 107, 112].

Mathematisch ist die Lokalisierung durch das Auftreten einer Ebene  $\partial\gamma$  definiert, an welcher ein Sprung in den Deformationsgeschwindigkeiten auftritt. Die Orientierung dieser Ebene ist über ihren Normalenvektor  $\mathbf{n}$  gegeben (siehe Abbildung 4.5). Betrachtet man den geometrisch linearen Fall (kleine Deformationen), dann ist der Sprung der Deformationsgeschwindigkeiten  $\mathbf{g}$  über die Gleichung

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^+ - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^- = \mathbf{g} \otimes \mathbf{n} \quad (4.14)$$

definiert und für das Spannungsgleichgewicht an der Ebene  $\partial\gamma$  gilt

$$(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^-) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (4.15)$$

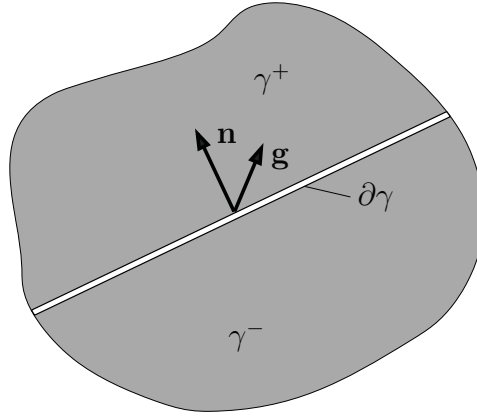


Abbildung 4.5.: Lokalisierungsebene

Unter der Berücksichtigung von Gl. (4.14) und Gl. (4.15) erhält man mit dem Stoffgesetz in der Form

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \dot{\epsilon} \quad (4.16)$$

die Beziehung

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{g} = 0. \quad (4.17)$$

Der Ausdruck

$$\mathbf{q} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \quad (4.18)$$

wird hierbei als akustischer Tensor bezeichnet und ist ein Tensor 2.Stufe. Das Entstehen von Lokalisierung aus einem gleichförmigen Deformationszustand kann dann als ein Eigenwertproblem formuliert werden. Der Beginn der Lokalisierung ist dabei äquivalent zur Existenz einer nichttrivialen Lösung von Gl. (4.17) und an die Bedingung

$$\det(\mathbf{q}) = 0 \quad (4.19)$$

gekoppelt. Gl. (4.19) stellt dabei ein allgemeines Lokalisierungskriterium dar und man spricht in dem Fall auch vom Versagen des akustischen Tensors.

Für den geometrisch nichtlinearen Fall erhält man in der Ausgangskonfiguration den akustischen Tensor  $\mathbf{Q}$  mit [125]

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{T} \otimes \mathbf{I} + 2\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}^m \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \quad (4.20)$$

und das dazugehörige Lokalisierungskriterium lautet analog

$$\det(\mathbf{Q}) = 0. \quad (4.21)$$

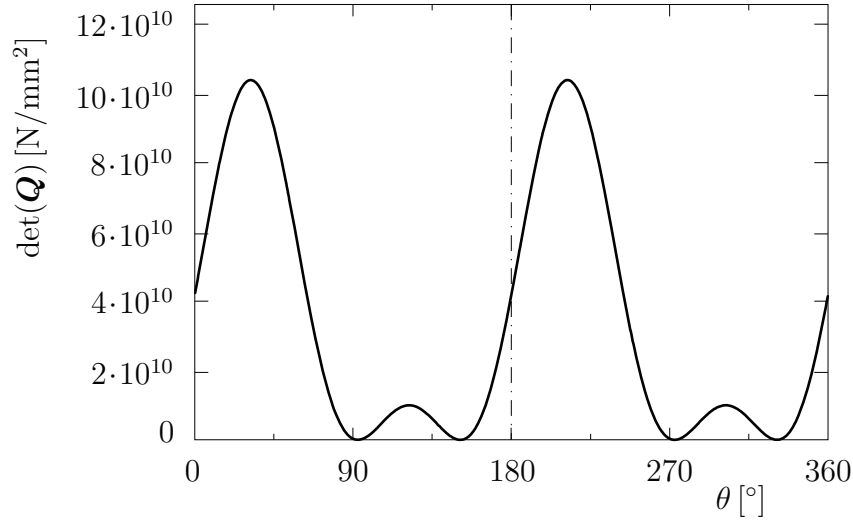


Abbildung 4.6.: Determinante des akustischen Tensors

Definiert man für den zweidimensionalen Fall den Normalenvektor in Abhängigkeit des Winkels  $\theta$  in der Form

$$\mathbf{N}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)^T \quad (4.22)$$

so kann man die Determinante des akustischen Tensors als Funktion von der Richtung des Normalenvektors darstellen. In Abbildung 4.6 ist eine solche Funktion für einen materiellen Punkt zum Zeitpunkt der Lokalisierung zu sehen. Der Verlauf der Funktion ist dabei von den aktuellen Materialeigenschaften und dem Deformationszustand des materiellen Punktes abhängig und wegen  $\mathbf{N}(\theta) = -\mathbf{N}(\theta + 180^\circ)$  ist der Funktionsverlauf in den Bereichen  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  und  $180^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$  identisch. Die Winkelkoordinaten der lokalen Minima der dargestellten Funktion im Bereich  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  geben dabei über die Richtung des Normalenvektors die Lage der zwei Lokalisierungsebenen an.

Im Weiteren wird mit  $\det(\mathbf{Q})|_{\min}$  das lokale Minimum der Determinante des akustischen Tensors in einem materiellen Punkt bezeichnet. In Abbildung 4.7 ist am Beispiel eines Risses unter einer Modus-I-Belastung<sup>2</sup> der Wert von  $\det(\mathbf{Q})|_{\min}$  in der plastischen Zone an der Rissspitze grafisch dargestellt. Für die dem Farbplot zugrunde liegende Rissbeanspruchung haben sich zu dem Zeitpunkt noch keine Lokalisierungen gebildet. Infolge der relativ niedrigen Werte von  $\det(\mathbf{Q})|_{\min}$  an der Rissspitze kann man aber davon ausgehen, dass bei einer weiteren Erhöhung der Modus-I-Beanspruchung es dort zuerst zum Versagen des akustischen Tensors und damit zur Entstehung von Lokalisierungen kommt.

Die zu den lokalen Minima gehörenden Winkelkoordinaten sind in Abbildung 4.8 zu sehen und wurden für den Bereich  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  ermittelt. An den gestrichelten Linien kommt es dabei zu einem Sprung von  $90^\circ$  in der Winkelkoordinate.

<sup>2</sup>siehe Abschnitt 8.2.1

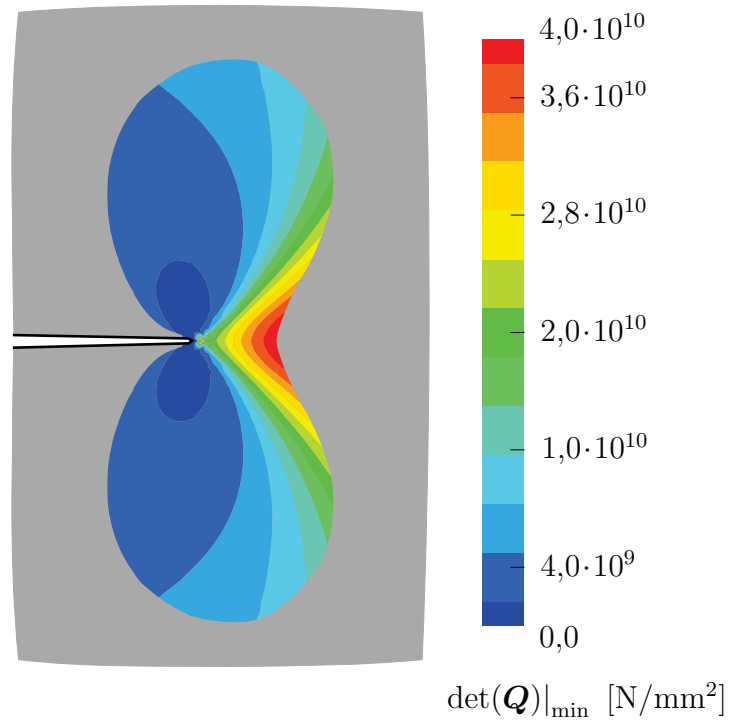


Abbildung 4.7.: Lokales Minimum der Determinante des akustischen Tensors im Bereich der plastischen Zone an der Risspitze unter einer Modus-I-Belastung

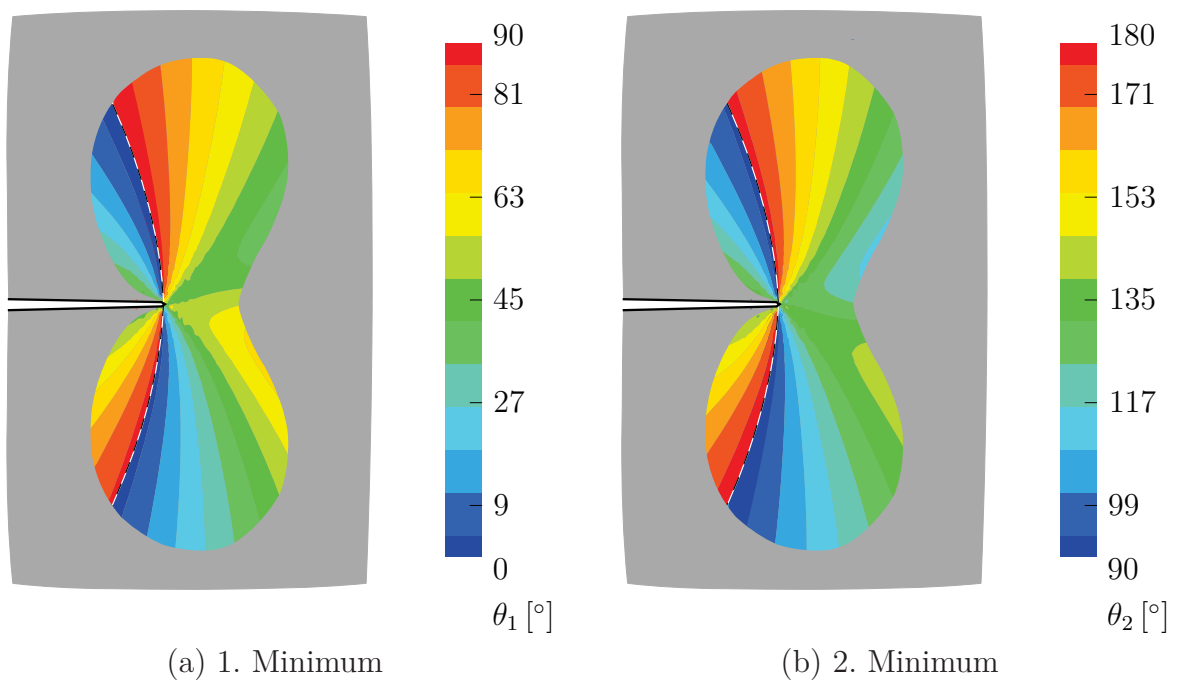


Abbildung 4.8.: Winkelkoordinaten für  $\det(\mathbf{Q})|_{\min}$

## 4.4. Regularisierung

So genannte einfache Materialmodelle, wie das in Abschnitt 4.2 vorgestellte ROUSSELIER-Modell, gehen von der Annahme aus, dass das Materialverhalten eines materiellen Punktes nur vom Zustand seiner infinitesimalen räumlichen Umgebung abhängt bzw. beeinflusst wird. Obwohl sich mit derartigen lokalen Materialmodellen ein breites Spektrum von Werkstoffen erfolgreich für konkrete Anwendungsfälle beschreiben lassen, versagt dieses lokale Konzept mit dem Auftreten von Dehnungslokalisierungen infolge von entfestigendem Materialverhalten [17, 60]. Die Ursache für das Versagen ist darin begründet, dass bei der lokalen Betrachtungsweise die kontinuumsmechanischen Stoffgesetze durch eine Mittelung des Materialverhaltens über ein repräsentatives Volumen gewonnen werden. Dadurch gehen die Informationen über die lokale Verteilung bzw. Wechselwirkung von Mikrodefekten verloren und man ist nicht in der Lage, die Lokalisierungsphänomene korrekt abzubilden [7, 68].

Problematisch ist hierbei der Typwechsel vom elliptischen zum hyperbolischen Typ der zugrunde liegenden Differentialgleichungen des lokalen Gleichgewichtszustandes [130]. In dem Zusammenhang spricht man auch von Verlust der Elliptizität. Als Folge des Typwechsels sind die vorhandenen Randbedingungen unzureichend und es existiert keine eindeutige Lösung mehr. Das führt letztendlich auf ein schlecht gestelltes Anfangs-Randwertproblem [60]. Für die Anwendung der Finite-Elemente-Methode<sup>3</sup> bedeutet das eine pathologische Netzabhängigkeit der numerischen Lösung in Gebieten mit Lokalisierung [19, 38], d.h. die Breite der Lokalisierungszone basiert auf der Elementgröße der lokalen Vernetzung.

Mittels spezieller Regularisierungsmethoden [25, 26] besteht die Möglichkeit, das lokal formulierte kontinuumsmechanische Modell zu erweitern und dadurch die Elliptizität des Differentialgleichungssystems sowie die Netzunabhängigkeit in einem gewissen Rahmen zu gewährleisten. Eine solche Erweiterung stellt das Konzept der nichtlokalen Wirkung dar und basiert auf der Annahme, dass die Spannungsantwort in einem materiellen Punkt nicht nur von der Verzerrungsgeschichte des Punktes, sondern auch von der Verzerrungsgeschichte seiner Umgebung abhängt [99]. Einen Vergleich verschiedener nichtlokaler Formulierungen findet man in [16].

Im Weiteren wird angenommen, dass bestimmte Zustandsgrößen der Materialbeschreibung einen nichtlokalen Charakter haben. Dabei kann man sich auf die Größe beschränken, welche die Schädigung und damit die Entfestigung im Materialmodell beschreibt [18]. Aus den lokal ermittelten Werten für die Schädigungsentwicklung  $\Delta\beta$  wird mittels

---

<sup>3</sup>siehe Abschnitt 5.1

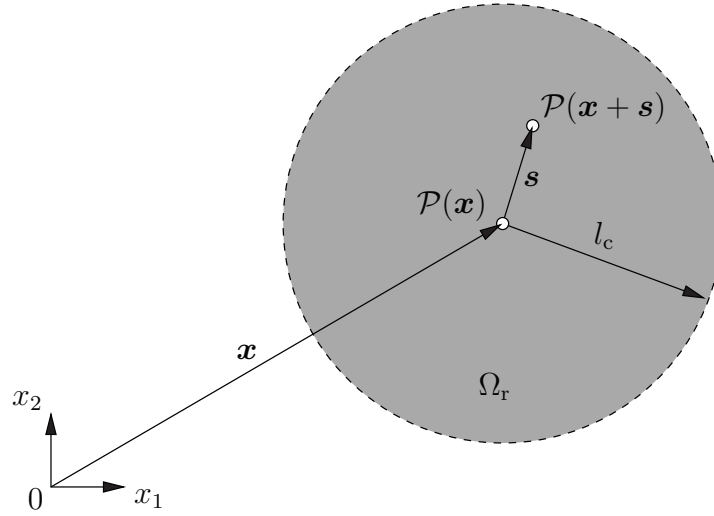


Abbildung 4.9.: Nichtlokales Konzept

der Beziehung [63, 64]

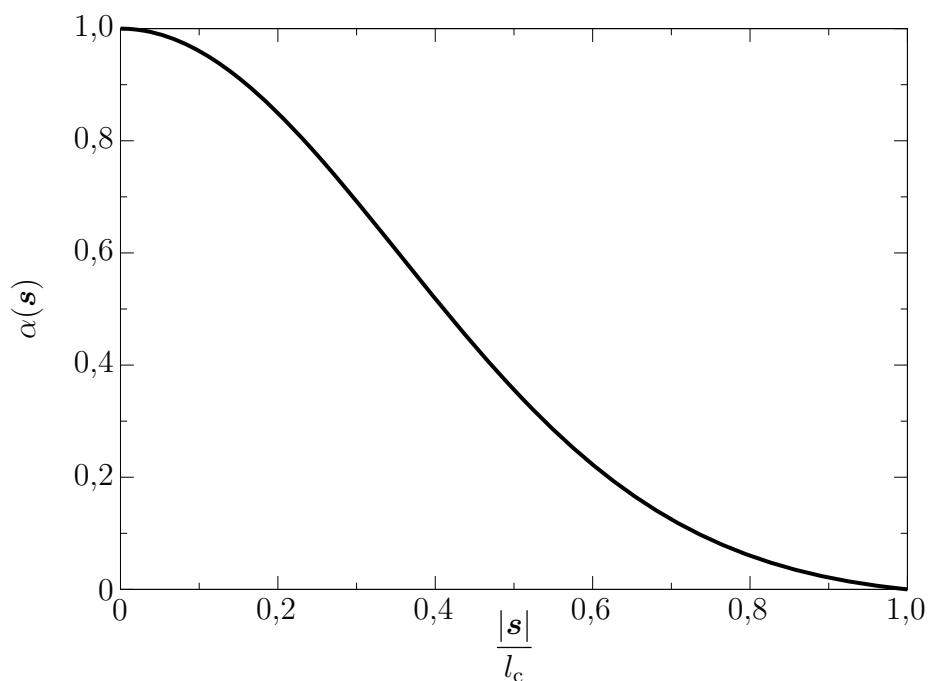
$$\Delta \bar{\beta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Omega_r(\mathbf{x})} \int_{\Omega_r(\mathbf{x})} \Delta \beta(\mathbf{x} + \mathbf{s}) \alpha(\mathbf{s}) d\Omega(\mathbf{s}) \quad (4.23)$$

der Schädigungszuwachs  $\Delta \bar{\beta}$  in einem materiellen Punkt als integrale Größe, welche eine Art Mittelwert symbolisiert, über ein repräsentatives Element  $\Omega_r$  bestimmt. Für den zweidimensionalen Fall wird mit der in [64] vorgeschlagenen Gewichtsfunktion

$$\alpha(\mathbf{s}) = \frac{e^{\kappa(\mathbf{s})} - e^{-4}}{1 - e^{-4}}, \quad \kappa(\mathbf{s}) = -4 \left( \frac{|\mathbf{s}|}{l_c} \right)^2 \quad (4.24)$$

der Einfluss des Punktes  $\mathcal{P}(\mathbf{x} + \mathbf{s})$  auf den Punkt  $\mathcal{P}(\mathbf{x})$  berücksichtigt (siehe Abbildung 4.9). Die charakteristische Länge  $l_c$  legt den Radius des repräsentativen Elements fest und ist ein interner materialabhängiger Längenparameter, der die Bestimmung der Breite der Lokalisierungszone gestattet. Der Verlauf der Gewichtsfunktion  $\alpha$  ist in Abbildung 4.10 dargestellt und entspricht näherungsweise einer Normalverteilung. Die Funktion wurde dabei so gewählt, dass am Rand des repräsentativen Elements  $\alpha(|\mathbf{s}| = l_c) = 0$  gilt.

Durch das nichtlokale Konzept ist eine bessere Approximation des realen Werkstoffverhaltens möglich, jedoch ist dabei ein erhöhter Aufwand bei der Modellbildung und Implementierung in vorhandene numerische Berechnungsverfahren notwendig. In dieser Arbeit wird die nichtlokale Regularisierung im Rahmen der FE-Simulation innerhalb einer expliziten Nachlaufrechnung realisiert und nach jedem konvergierten Lastschritt ausgeführt. Aufgrund der nachträglichen Veränderung der Schädigungsvariablen  $\beta$  kommt es dabei zu einer Störung des ermittelten Gleichgewichtszustands, der durch eine anschließende

Abbildung 4.10.: Gewichtsfunktion  $\alpha$ 

Gleichgewichtsiteration wieder hergestellt werden muss. Letztendlich kann der Elliptizitätsverlust sowie die Netzabhängigkeit der numerischen Lösung mit diesem Verfahren der Regularisierung nicht vollständig vermieden, sondern nur verschoben bzw. minimiert werden.





## 5. Adaptive FEM

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist zur Zeit eines der wichtigsten und am meisten verbreiteten numerischen Berechnungsverfahren im Ingenieurwesen zur näherungsweisen Lösung partieller Differentialgleichungen, welche sehr häufig bei der mathematischen Beschreibung physikalischer Phänomene auftreten.

Da die FEM ein Näherungsverfahren ist, hängt die Qualität der Ergebnisse erheblich von der Güte der Gebietsdiskretisierung, d.h. der Vernetzung des Berechnungsmodells mittels finiter Elemente ab. Im Allgemeinen ist ein entsprechendes Anwenderwissen die Voraussetzung für eine zweckmäßige Nutzung der Methode, insbesondere bei der Generierung einer geeigneten problembezogenen Vernetzung und der Beurteilung der Ergebnisqualität. Erschwerend kommt hinzu, dass für bestimmte Aufgabenstellungen im Vorfeld der Berechnung keine oder nur ungenaue Vorhersagen über ein mögliches Berechnungsergebnis getroffen werden können. Infolgedessen wird dann das gesamte Gebiet sehr fein vernetzt, was zu einer erheblichen Steigerung des numerischen Aufwands führen kann, oder man erzwingt ein fehlerhaftes Simulationsergebnis aufgrund einer unpräzisen FE-Vernetzung.

Eine Möglichkeit zur Vermeidung dieser Problematik ist die Anwendung adaptiver Verfahren, welche sowohl im Orts- als auch im Zeitbereich eine automatische Anpassung an die gegebenen Verhältnisse ermöglichen und im Sinne einer gleichmäßigen Fehlerverteilung eine optimale Lösung finden sollen. Die ortsadaptiven Verfahren kann man dabei in h-, p- und r-Adaption unterscheiden.

Die h-Adaption ist durch eine lokale Verfeinerung bzw. Vergröberung der FE-Vernetzung gekennzeichnet. Mit einer wachsenden Anzahl von Knoten und Elementen steigt dabei auch der numerische Aufwand bei der Lösung der entstehenden Gleichungssysteme. Im Gegensatz dazu wird bei der p-Adaption der Polynomgrad der Näherungsfunktionen erhöht und führt bei unveränderter Element- und wachsender Knotenanzahl ebenfalls zu einem erhöhten numerischen Aufwand. Mit der r-Adaption werden schließlich die Knoten eines bestehenden FE-Netzes entsprechend verschoben und somit der Fehler über eine Optimierung der Elementgrößen minimiert. Da die Knoten- und Elementanzahl konstant bleiben, ist diese Methode hinsichtlich komplexer Problemstellungen nur eingeschränkt nutzbar.

Aufgrund der vergleichsweise einfachen Realisierung hat sich das h-adaptive Finite-Elemente-Verfahren weitgehend durchgesetzt und wird im Rahmen dieser Arbeit angewandt. Generell sind dabei die folgende Arbeitsschritte für die adaptiven FE-Lösung eines Problems abzuarbeiten:

1. Erstellung eines geeigneten Startnetzes (Grobnetz) mit einer der Problemstellung angemessenen Approximation der Geometrie.
2. Berechnung der FE-Lösung.
3. Bestimmung des lokalen Fehlers.
4. Liegt der Fehler unterhalb einer vorgegeben Toleranzschranke, dann ist die Berechnung abgeschlossen. Ansonsten wird ein neues, über die Auswertung des Fehlers angepasstes FE-Netz konstruiert und mit dem 2. Schritt fortgefahren.

Einen ausführlichen Überblick über die adaptive FEM erhält man z.B. in [129, 142].

## 5.1. Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode ist ein so genanntes Gebietsverfahren, bei dem die zu untersuchende Struktur (Bauteil) in einzelne Berechnungselemente, den finiten Elementen, zerlegt wird. Innerhalb der Elemente erfolgt die Näherung an die exakte Lösung über einfache Funktionen. Die Kopplung der finiten Elemente untereinander erfolgt dabei über die Elementknoten. Eine ausführliche Darstellung der Finiten-Elemente-Methode ist in [15, 98, 142, 145] zu finden. Die im FE-Algorithmus verwendeten Vektoren und Matrizen sind detailliert in [53] dargestellt.

In dieser Arbeit gelten für die Anwendung der FEM folgende Einschränkungen:

- das Materialverhalten ist zeitunabhängig,
- die Trägheitskräfte bleiben unberücksichtigt,
- kein Temperatureinfluss.

Als Ausgangspunkt für die mathematische Formulierung des FEM-Gleichungssystems steht das Prinzip der virtuellen Arbeit, welches in der Darstellung der Ausgangskonfigu-

ration

$$\int_{V_0} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{E} dV_0 - \int_{A_0} \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{u} dA_0 = 0 \quad (5.1)$$

lautet. Hierbei wird für einen Körper im Gleichgewichtszustand die Gleichheit der Arbeit der inneren (1.Term) und äußeren Kräfte (2.Term) für eine beliebige virtuelle Verschiebung  $\delta \mathbf{u}$  beschrieben [145]. Dabei steht  $V_0$  für das Volumen des betrachteten Körpers und mit  $\mathbf{R}$  werden die Kräfte an der Körperberandung  $A_0$  berücksichtigt. Die Geschwindigkeitsformulierung von Gl. (5.1) lautet dann [53]

$$\int_{V_0} \left\{ \dot{\mathbf{T}} \cdot \delta \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{T} \cdot \left[ (\text{grad } \dot{\mathbf{u}})^T \cdot \text{grad} (\delta \dot{\mathbf{u}}) \right] \right\} dV_0 - \int_{A_0} \dot{\mathbf{R}} \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} dA_0 = 0 \quad (5.2)$$

mit der materiellen Zeitableitung des 2. PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensors

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{T}}{d\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}}. \quad (5.3)$$

Der Ausdruck  $d\mathbf{T}/d\mathbf{E}$  repräsentiert dabei die Materialmatrix, die durch Ableiten des in der Zeit diskretisierten Materialgesetzes nach den Verzerrungen ermittelt wird (vgl. hierzu Gl. (2.88) - (2.101)).

Die im Rahmen der FEM notwendige Diskretisierung eines betrachteten räumlichen Gebietes erfolgt durch die Unterteilung in endlich viele finite Elemente. Innerhalb eines solchen finiten Elements lassen sich dann die globalen Koordinaten  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$  in Abhängigkeit der dimensionslosen lokalen Elementkoordinaten  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$  unter der Zuhilfenahme der Knotenkoordinaten mit

$$X_i(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^{n_K} N_k(\boldsymbol{\xi}) X_{(k)i} \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (5.4)$$

berechnen. Hierbei ist  $X_{(k)i}$  die globale Koordinate  $i$  des lokalen Elementknotens  $k$ . Die Anzahl der Knoten im Element wird mit  $n_K$  gekennzeichnet und ist gleich der Anzahl der Formfunktionen  $N_k(\boldsymbol{\xi})$ . Die Formfunktionen werden dabei so gewählt, dass sie jeweils am zugehörigen Elementknoten den Wert Eins haben, während sie an den restlichen Knoten des Elements den Wert Null einnehmen. Für die in dieser Arbeit verwendeten 6-Knoten-Dreieck-Elemente sind die quadratischen Formfunktionen in Anhang B aufgeführt. Mit dem Übergang zu einer Matrixschreibweise lassen sich im Weiteren die algebraischen Gleichungen in geeigneter Weise zusammenfassen und man erhält für Gl. (5.4) die kompakte Darstellung

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}) \check{\mathbf{X}}. \quad (5.5)$$

mit den Knotenkoordinaten des Elements

$$\check{\mathbf{X}} = \left( \mathbf{X}_{(1)}, \mathbf{X}_{(2)}, \dots, \mathbf{X}_{(n_K)} \right)^T \quad (5.6)$$

Für die Approximation der Feldgrößen innerhalb eines Elements hat sich für viele Problemstellungen die Methode einer isoparametrischen Elementformulierung als günstig erwiesen. Bei diesem Konzept werden sowohl die Geometrie als auch alle Feldgrößen im Element durch die gleichen Interpolationsfunktionen (vgl. Gl. (5.4)) angenähert. Somit kann in einem Element die Verschiebung  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$  für einen beliebigen Punkt  $\boldsymbol{\xi}$  durch die Verschiebungen der Elementknoten  $\check{\mathbf{u}}^e$  und die Matrix der Formfunktionen  $\mathbf{G}$  mittels

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\xi}) \check{\mathbf{u}}^e \quad (5.7)$$

bestimmt werden. In analoger Weise lassen sich mit

$$\text{grad}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \hat{\mathbf{J}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \hat{\mathbf{J}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{G}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \check{\mathbf{u}}^e = \bar{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\xi}) \check{\mathbf{u}}^e \quad (5.8)$$

die Verschiebungsgradienten in Abhängigkeit von den Knotenverschiebungen des Elements angeben. Hierbei ist  $\hat{\mathbf{J}}$  die Jacobi-Matrix, welche über die Beziehung

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \hat{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad (5.9)$$

definiert ist und die Verschiebungsableitungen bezüglich der lokalen Elementkoordinaten mit den Ableitungen bezüglich der globalen Koordinaten verknüpft. Für die materiellen Zeitableitungen folgt dann entsprechend

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{G} \dot{\check{\mathbf{u}}}^e \quad (5.10)$$

$$\text{grad}(\dot{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{G}} \dot{\check{\mathbf{u}}}^e. \quad (5.11)$$

Nach dem Einsetzen dieser Approximationen in die Variationsformulierung (5.2) erhält man letztendlich das nichtlineare algebraische FE-Gleichungssystem für die Inkremente der Knotenverschiebungen  $\Delta \check{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{K}(\check{\mathbf{u}}) \Delta \check{\mathbf{u}} = \Delta \check{\mathbf{P}}. \quad (5.12)$$

Der Vektor  $\Delta \check{\mathbf{P}}$  stellt in dem Zusammenhang die Inkremente der auf die Knoten bezogenen Volumen- und Oberflächenkräfte dar. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  ist das Ergebnis der Assemblierung

$$\mathbf{K} = \bigoplus_{i=1}^{n_E} \mathbf{K}_i^e \quad (5.13)$$

der einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_i^e$  mit

$$\mathbf{K}_i^e = \int_{V_0^e} \left[ \mathbf{B}^T \left( \frac{d\mathbf{T}}{d\mathbf{E}} \right) \mathbf{B} + \bar{\mathbf{G}}^T \mathbf{T} \bar{\mathbf{G}} \right] dV_0^e. \quad (5.14)$$

Hierbei steht  $n_E$  für die Anzahl der Elemente im FE-Modell und  $V_0^e$  für das Elementvolumen. Die Matrix  $\mathbf{B}$  stellt mit

$$\dot{\mathbf{E}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) \dot{\mathbf{u}}^e \quad (5.15)$$

die nichtlineare Beziehung zwischen der Verzerrungsgeschwindigkeit in einem materiellen Punkt und der Geschwindigkeit der Knotenverschiebungen dar. Die numerische Integration über das Elementvolumen in Gl. (5.14) erfolgt dann näherungsweise mit Hilfe der GAUSSschen Integrationsformel [40]

$$\mathbf{K}^e \approx \sum_{i=1}^{n_G} \omega_i \left[ \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\xi}_i) \left( \frac{d\mathbf{T}}{d\mathbf{E}} \right)_{\boldsymbol{\xi}_i} \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}_i) + \bar{\mathbf{G}}^T(\boldsymbol{\xi}_i) \mathbf{T} \bar{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\xi}_i) \right] \det(\hat{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\xi}_i)) . \quad (5.16)$$

Hierbei sind  $n_G$  die Anzahl der GAUSS-Punkte (Integrationsstützstellen) und  $\omega_k$  die dazugehörigen Wichtungsfaktoren (siehe Anhang B).

Das nichtlineare FE-Gleichungssystem (5.12) wird innerhalb eines jeden Lastinkrements (Lastschritt) mit Hilfe des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens [142] numerisch iterativ gelöst. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  hängt dabei noch von den Spannungen ab (vgl. Gl. (5.14)). Bei elasto-plastischem Materialverhalten liegt kein expliziter Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen vor, so dass zur Bestimmung der Spannungen die Materialgleichungen integriert werden müssen. Hierzu ist das Gleichungssystem (4.8) - (4.11) als Anfangswertproblem für jeden GAUSS-Punkt des Berechnungsmodells in jedem Iterationsschritt des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens mit Hilfe eines Zeitdiskretisierungsverfahren numerisch zu lösen [125]. Im Ergebnis werden die inneren Variablen  $\beta$  und  $\varepsilon_v^p$ , der plastische Anteil des Deformationstensors  $\mathbf{C}^p$  und der plastische Multiplikator  $\dot{\lambda}$  ermittelt. Mit den gegebenen Gesamtdeformationen  $\mathbf{C}$  sind dann die Spannungen anhand Gl. (2.91) bestimmbar. Am Ende eines jeden konvergierten Lastschritts wird dann das Materialgesetz zusätzlich in jedem Element an den Positionen der Elementknoten integriert [29].

Bei linear-elastischem Materialverhalten und kleinen Deformationen vereinfacht sich das FE-Gleichungssystem zu

$$\mathbf{K}(\check{\mathbf{u}})\check{\mathbf{u}} = \check{\mathbf{P}} \quad (5.17)$$

mit der Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}^e = \int_{V_0^e} [\bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D}^e \bar{\mathbf{B}}] dV_0^e \quad (5.18)$$

und  $\bar{\mathbf{B}}$  als die linearisierte  $\mathbf{B}$ -Matrix.

## 5.2. Fehlerschätzer

Die Lösung von Aufgaben mittels der Finite-Elemente-Methode ist in der Regel fehlerbehaftet. Geht man davon aus, dass eine adäquate Modellierung des betrachteten Problems vorliegt, so treten hauptsächlich Diskretisierungsfehler auf, die sich aus der Art der Gebietszerlegung, der Approximation des Strukturrandes oder der Lastbeschreibung ergeben. Es ist deshalb wesentlich, Aussagen über die Qualität einer FE-Lösung treffen zu können. Am einfachsten erfolgt das mit Hilfe des Fehlers, welcher die Differenz von exakter und numerischer Lösung darstellt. Da gewöhnlich eine exakte Lösung des betrachteten Problems nicht zur Verfügung steht, muss der Fehler und damit auch die Genauigkeit der Lösung geschätzt werden.

Man unterscheidet zwischen a-priori<sup>1</sup> und a-posteriori<sup>2</sup> Fehlerabschätzung. Ziel der klassischen a-priori Fehlerschätzung ist es, den Fehler nur über die Auswertung der Problemdata (Geometrie, Material, Randbedingungen) vorherzusagen, ohne dabei auf die Ergebnisse einer FE-Rechnung zurückzugreifen. Beispielsweise ist es sinnvoll, die Vernetzung in der Umgebung einer scharfen Riss Spitze von vornherein feiner zu gestalten, da in diesem Bereich hohe Gradienten der Feldgrößen zu erwarten sind. Im Gegensatz dazu wird der a-posteriori Fehlerschätzer auf der Grundlage der berechneten FE-Näherungslösung ermittelt und hat sich besonders in der Anwendung adaptiver Finite-Elemente-Verfahren etabliert. Dabei wird zur Reduzierung des lokalen Diskretisierungsfehlers die adaptive Anpassung der FE-Vernetzung mit der Hilfe sogenannter Fehlerindikatoren gesteuert. Des Weiteren ermöglicht der Fehlerschätzer eine Kontrolle über den Gesamtfehler und man kann entsprechende Abbruchkriterien für das adaptive Verfahren formulieren. An die Fehlerschätzung wird in dem Zusammenhang die Anforderung gestellt, zuverlässig den lokalen sowie globalen Fehler zu bestimmen und dabei den numerischen Aufwand entsprechend gering zu halten. Eine Übersicht über die verschiedenen Typen von a-posteriori Fehlerschätzern findet man z.B. in [139] und [142].

Der für ein zweidimensionales finites Element  $\mathcal{E}$ , mit der Fläche  $\Omega$  und dem Rand  $\partial\Omega$ , verwendete Fehlerindikator  $\eta_{\mathcal{E}}$  ist mit

$$\eta_{\mathcal{E}}^2 = \frac{h_{\mathcal{E}}^2}{\lambda_D} \int_{\Omega} |\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}_v|^2 d\Omega + \sum_{\mathcal{K} \in \partial\Omega} \frac{h_{\mathcal{E}}}{\lambda_D} \int_{\mathcal{K}} |[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{K}}]|^2 ds \quad (5.19)$$

definiert [30] und repräsentiert einen residuenbasierten a-posteriori Fehlerindikator. Hierbei ist  $\lambda_D$  eine materialabhängige Konstante und  $h_{\mathcal{E}}$  eine charakteristische Elementlänge. Die Volumenbelastung im Element wird mit  $\mathbf{f}_v$  dargestellt und  $\mathbf{n}_{\mathcal{K}}$  ist der nach außen gerichtete Normalenvektor der Elementkante  $\mathcal{K}$ . Ausgehend von der Näherungslösung ermittelt der erste Term in Gl. (5.19) den Fehler im Elementinneren bezüglich

---

<sup>1</sup>a priori: von vornherein

<sup>2</sup>a posteriori: aus Erfahrung

des Gleichgewichts der Volumenkräfte mit dem Spannungszustand. Des Weiteren hat durch die FE-Approximation nur das Verschiebungsfeld einen kontinuierlichen Verlauf über die Elementgrenzen hinweg. Im zweiten Teil des Fehlerindikators wird deshalb über den Ausdruck

$$[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_K] = (\boldsymbol{\sigma}^+ + \boldsymbol{\sigma}^-) \cdot \mathbf{n}_K \quad (5.20)$$

der Sprung der Spannungen an den Elementkanten bestimmt und als Fehlergröße berücksichtigt. Die Summe der Fehlerindikatoren aller finiten Elemente bildet dann den Fehlerschätzer  $\eta_G$ , der den Gesamtfehler der FE-Lösung angibt:

$$\eta_G^2 = \sum_{\forall \mathcal{E}} \eta_E^2. \quad (5.21)$$

Im Fall linearer Elastizität kann in Gl. (5.19) der 1. Term vernachlässigt werden [71] und der Fehlerindikator  $\eta_E$  reduziert sich auf

$$\eta_E^2 = \sum_{K \in \partial \Omega} \frac{l_K}{\lambda_D} \int_K |[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_K]|^2 ds, \quad (5.22)$$

so dass für den Elementfehler nur die Kantensprünge betrachtet werden. Hierbei steht  $l_K$  für die Länge der Kante  $K$  und die Konstante  $\lambda_D$  wird gewöhnlich dem Elastizitätsmodul gleichgesetzt [5, 47].

Für den nichtlinearen bzw. elastisch-plastischen Fall ist eine genaue Angabe der Materialkonstante nicht möglich. Mit der Annahme, dass sie in der gleichen Größenordnung wie beim linear-elastischen Fall liegt, erfolgt eine Annäherung durch den Elastizitätsmodul. Dadurch ist es möglich, dass der Fehler für plastifizierte Elemente unterschätzt wird. Bei homogenem Material hat die Größe von  $\lambda_D$  letztendlich keinen Einfluss auf die Netzadaption, wenn die Auswertung der Fehlerindikatoren relativ zu einer vorgegebenen Schranke erfolgt.

Zusätzlich wird ein spezieller Fehlerindikator bezüglich der Fließbedingung betrachtet [129], der für elastisch-plastisches Materialverhalten eine feinere Vernetzung der Grenzen zwischen elastischen und plastifizierten Zonen ermöglicht. Hierbei wird die KUHN-TUCKER-Bedingung (2.87) ausgewertet. In Gebieten mit elastischem Verhalten ist aufgrund von  $\dot{\lambda} = 0$  die Bedingung  $\dot{\lambda}Y = 0$  immer erfüllt. Für den plastischen Fall wird die Fließbedingung  $Y$  im Rahmen der gegebenen numerischen Genauigkeit erfüllt. Mit Hilfe des Fehlerindikators [30]

$$\eta_Y^2 = \int_{\Omega} (\dot{\lambda}Y)^2 d\Omega \quad (5.23)$$

kann dann hinsichtlich der Näherungslösung beurteilt werden, wie genau die plastische Zone durch die Vernetzung abgebildet wird. Zudem kann durch die Auswertung des

Fehlerindikator (5.23) der Einfluss der ungenauen Approximation von  $\lambda_D$  in Gl. (5.19) für plastifizierte Elementen korrigiert werden [30].

Zur Auswertung der Fehlerindikatoren wird ein relativer Vergleichswert verwendet, der hier dem maximal ermittelten Fehlerindikator

$$\bar{\eta}_E^2 = \max_{\forall \mathcal{E}}(\eta_E^2) \quad (5.24)$$

$$\bar{\eta}_Y^2 = \max_{\forall \mathcal{E}}(\eta_Y^2) \quad (5.25)$$

entspricht. Die Verfeinerung eines Elementes wird dann vorgesehen, wenn die folgenden Bedingungen

$$\eta_E^2 \geq \alpha_E^f \cdot \bar{\eta}_E^2 \quad (5.26)$$

$$\eta_Y^2 \geq \alpha_Y^f \cdot \bar{\eta}_Y^2 \quad (5.27)$$

einzelnen oder gemeinsam erfüllt sind. Gilt im Gegensatz dazu eine der Bedingungen

$$\eta_E^2 \leq \alpha_E^g \cdot \bar{\eta}_E^2 \quad (5.28)$$

$$\eta_Y^2 \leq \alpha_Y^g \cdot \bar{\eta}_Y^2, \quad (5.29)$$

dann erfolgt eine Vergrößerung der Vernetzung. Dabei sind  $\alpha_E^f$ ,  $\alpha_Y^f$ ,  $\alpha_E^g$  und  $\alpha_Y^g$  die Parameter zur Steuerung der adaptiven Verfeinerung bzw. Vergrößerung während der FE-Simulation.

Ein einfacher kantenorientierter Fehlerindikator kann mit

$$\eta_K^2 = \frac{l_K}{\lambda_D} \int_K |[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_K]|^2 ds \quad (5.30)$$

definiert werden. Die Elementkante  $K$  ist dann für eine Teilung vorgesehen, wenn

$$\eta_K^2 \geq \alpha_K^f \cdot \bar{\eta}_K^2 \quad (5.31)$$

mit

$$\bar{\eta}_K^2 = \max_{\forall K}(\eta_K^2) \quad (5.32)$$

gilt.

### 5.3. Adaptive Netzanpassung

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein h-adaptives Verfahren benutzt. Ausgehend von einer groben FE-Vernetzung des Berechnungsmodells erhält man durch eine schrittweise



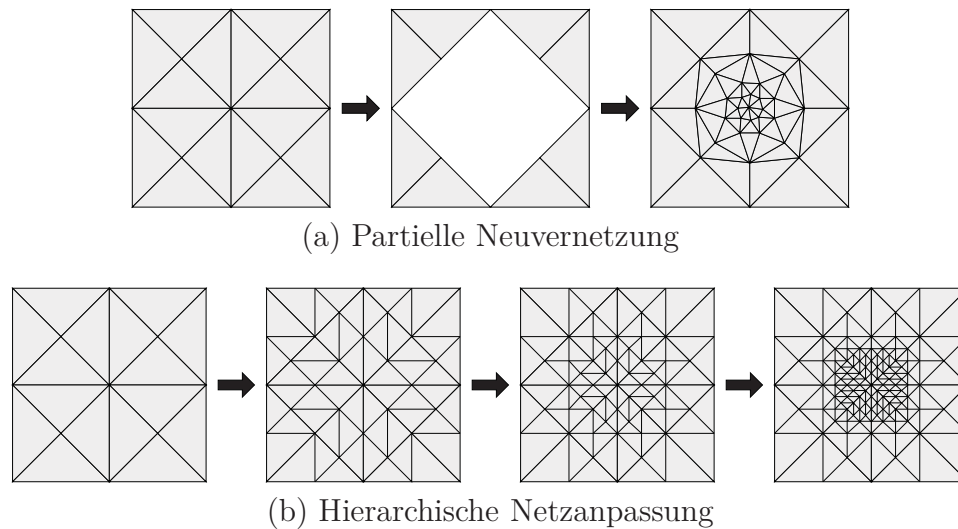


Abbildung 5.1.: Vergleich der Methoden zur Netzanpassung

fehlergesteuerte lokale Netzverfeinerung bzw. -vergröberung eine optimale FE-Lösung. Die dafür notwendige Veränderung der Vernetzung wird hierbei mittels der Methode der hierarchischen Netzanpassung durchgeführt. Im Gegensatz zur partiellen Neuvernetzung (siehe Abbildung 5.1a), bei der man finite Elemente im FE-Netz löscht und den freien Bereich den Anforderungen gemäß feiner oder gröber vernetzt, erfolgt hier die Netzanpassung durch das Teilen oder Wiedervereinen vorhandener finiter Elemente (Abbildung 5.1b). Es existiert dabei eine hierarchische Struktur, in welcher die aus einer Elementteilung hervorgegangenen Sohn-Elemente einem Vater-Element zugeordnet sind. Eine spätere Vergröberung erfolgt dann unter Berücksichtigung dieser Vater-Sohn-Beziehung. In der Regel sind mehrere Schritte der Netzanpassung notwendig, um eine vergleichbare Netzfeinheit wie bei der Methode der Neuvernetzung zu erreichen. Dafür ist das Verfahren sehr robust und gestattet eine schnelle Modifikation des FE-Netzes. In Abhängigkeit von der Startvernetzung kann hierbei mit dem Einsatz einfacher standardisierter Teilungsvorschriften eine optimale Elementform bei fortlaufender Verfeinerung gewährleistet werden. Darüber hinaus ist für den Einsatz effizienter iterativer FE-Solver mit moderner Multilevel-Vorkonditionierung [27, 83, 144] eine hierarchische Netzstruktur notwendig.

### 5.3.1. Netzverfeinerung

Für die hier ausschließlich verwendeten Dreieckselemente ist die in Abbildung 5.2 dargestellte grüne oder rote Unterteilung vorgesehen [32]. Ein Vater-Element wird dabei in zwei (grün) bzw. vier (rot) Sohn-Elemente unterteilt und die dadurch entstandene Vater-Sohn-Beziehung im so genannten Elementbaum (siehe Abbildung 5.3) vermerkt, so

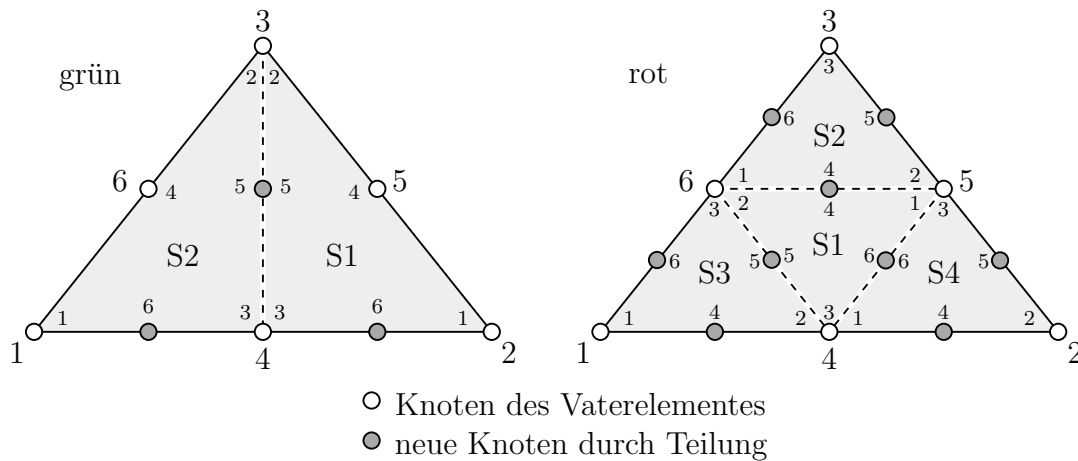


Abbildung 5.2.: Elementteilung: Interne Nummerierung der Elementknoten von Vater- und Sohn-Elementen

dass für jedes Element des Ausgangsnetzes der geschichtliche Ablauf der Elementteilung nachvollzogen werden kann. Für die Generierung der Sohn-Elemente müssen neue Knoten und Kanten definiert und vorhandene Kanten am jeweiligen Mittenknoten halbiert werden. Dabei entstehen jeweils zwei Sohn-Kanten und die Beziehung zur Vater-Kante wird ebenfalls im so genannten Kantenbaum vermerkt. Durch die Art und Weise der Elementteilung sind bei einer Netzverfeinerung die Form und Größe der resultierenden Elemente entsprechend eingeschränkt.

Bei der Verfeinerung eines Elementes werden die entsprechenden Elementkanten zur Teilung markiert. Die Markierung kann dabei kantenorientiert (Markierung einzelner Kanten) oder elementorientiert (Markierung aller Kanten im Element) erfolgen. Diese markierten Kanten werden dann im Verlauf der Netzverfeinerung zuerst geteilt. Für die weitere Vorgehensweise haben sich zwei unterschiedliche Verfeinerungsstrategien etabliert:

- **grüne Netzverfeinerung:**

Für alle Elemente mit mindestens einer geteilten Kante erfolgt eine grüne Teilung. Hierbei ist zu beachten, dass die Elementteilung immer an der längsten Elementseite stattfindet. Die dazugehörige Kante wird dann, falls noch nicht geschehen, ebenfalls geteilt. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis keine Elemente mehr zur Teilung gefunden werden.

- **rot-grüne Netzverfeinerung:**

Zuerst werden die jeweiligen Elemente rot geteilt, welche mindestens zwei unterteilte Kanten besitzen. Anschließend werden alle Elemente mit nur einer geteilten Kante grün verfeinert. Auch hier wird immer zuerst eine Teilung an der längsten

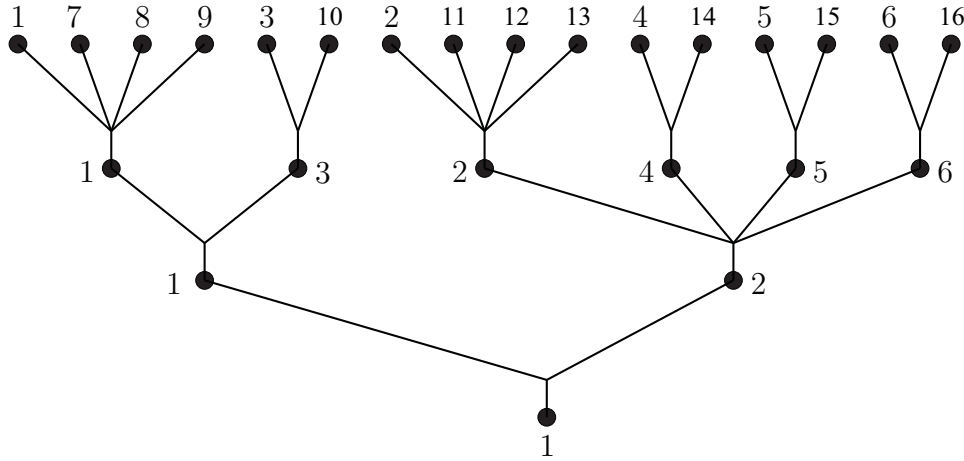


Abbildung 5.3.: Schematische Darstellung des Elementbaumes

Elementseite erzwungen. Die Prozedur der roten und grünen Teilung wird dann abwechselnd wiederholt durchgeführt, bis für die Verfeinerung keine Elemente mehr gefunden werden.

Hierbei soll mit der erzwungenen grünen Teilung an der jeweils längsten Elementseite das Entstehen ungünstiger Elementformen vermieden werden. Eine ausschließlich rote Elementteilung ist im Rahmen dieser Arbeit nicht vorgesehen.

Direkt im Anschluss an eine Elementteilung müssen im Fall von inelastischen Problemen die Feldvariablen in den GAUSS-Punkten vom Vater- auf die neuen Sohn-Elemente übertragen werden. Eine dafür bewährte Methode ist die elementorientierte Werteübertragung [95]. Hierfür ist es sehr vorteilhaft, dass am Ende eines konvergierten Lasso-Schritts das Materialgesetz in den Elementen zusätzlich an den Positionen der Elementknoten integriert wird und damit eine notwendige, aber ungenaue Extrapolation der GAUSS-Punktwerte auf die Elementknoten entfallen kann [30].

Zuerst werden die Feldvariablen in den Knoten der Sohn-Elemente bestimmt. Für die Knoten der Sohn-Elemente, welche mit den Knoten im Vater-Element exakt zusammenfallen (vgl. Abbildung 5.2), werden diese Werte einfach kopiert. Für die neu generierten Knoten der Sohn-Elemente erfolgt die Berechnung der Knotenpunktwerte mittels der Formfunktionen des Vater-Elements. Da hier eine isoparametrische Elementformulierung verwendet wird, können alle Feldvariablen bzw. deren Tensorkomponenten  $y_i$  mit  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  mittels der Übertragungsvorschrift

$$\mathbf{y}^{\text{Sohn}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^{n_K} N_k(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{y}_{(k)}^{\text{Vater}} \quad (5.33)$$

für die neuen Knotenpositionen, formuliert in den lokalen Koordinaten  $\boldsymbol{\xi}$  des Vater-Elements, berechnet werden. Der Vektor  $\mathbf{y}_{(k)}^{\text{Vater}}$  enthält hier die Komponenten  $y_i$  für die

interne Knotenposition  $k$  des Vaterelements. Die letztendliche Bestimmung der Werte in den GAUSS-Punkten der Sohn-Elemente wird dann mit Hilfe der Formfunktionen dieser neu generierten Elemente analog der Vorschrift (5.33) durchgeführt.

Eine Ausnahme bildet hier die Bestimmung des Verzerrungstensors  $\mathbf{C}$  in den Sohn-Elementen. Für den ebenen Verzerrungszustand (EVZ) kann die Matrix des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  im Element unter Zuhilfenahme von Gl. (2.7) und (5.8) mit

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = \bar{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{\ddot{u}}^e + \mathbf{I} \quad (5.34)$$

sehr genau berechnet und anschließend der Verzerrungstensor mit Gl. (2.13) bestimmt werden [30]. Im Vergleich zur Anwendung der Übertragungsvorschrift (5.33) führt diese Vorgehensweise zu einem stabileren Verlauf der FE-Simulation für den Fall sehr großer Verzerrungen.

Eine weitere Methode zur Übertragung der Feldgrößen auf die neue Vernetzung ist ein patchorientiertes Verfahren [31], bei dem auch benachbarte Elemente zur Berechnung herangezogen werden. Diese Herangehensweise führt zu geglätteten Verläufen der Feldgrößen über die Elementgrenzen hinweg und ist bezüglich der Auswertung des Kanten-sprungfehlers in Gl. (5.19) eher ungeeignet.

### 5.3.2. Netzvergrößerung

Eine lokale Vergrößerung der Vernetzung ist nur dann möglich, wenn die betreffenden Elemente aus einer früheren Unterteilung hervorgegangen sind. Mit Hilfe des Elementbaums können zueinander gehörende Sohn-Elemente identifiziert werden und, wenn bei allen Sohn-Elementen eine Markierung zur Vergrößerung vorliegt, zum Vater-Element wieder zusammengefügt werden. In dem Zusammenhang werden auch die zugehörigen Elementkanten wieder hergestellt. Eine gröbere Vernetzung als die Ausgangsvernetzung kann dabei mit diesem Verfahren nicht erreicht werden.

Bei der Vergrößerung erfolgt eine besondere Berechnung der Feldgrößen für die Knoten im Vater-Element, denen jeweils mehrere Knoten von verschiedenen Sohn-Elementen zugeordnet sind. Eine einfache Möglichkeit der Werteübertragung ist die Anwendung des arithmetischen Mittels. Für eine grüne Vergrößerung wird die Feldvariable  $y$  für die Knoten 3 und 4 des Vater-Elements (vgl. Abbildung 5.2) mit

$$y_{(3)}^{\text{Vater}} = \frac{1}{2} (y_{(2)}^{\text{Sohn1}} + y_{(2)}^{\text{Sohn2}}) \quad (5.35)$$

$$y_{(4)}^{\text{Vater}} = \frac{1}{2} (y_{(3)}^{\text{Sohn1}} + y_{(3)}^{\text{Sohn2}}) \quad (5.36)$$

berechnet. Der untere Index der Feldvariablen  $y$  bezeichnet hierbei die interne Knotennummer im betreffenden Vater- bzw. Sohn-Element.

Ein qualitativ besserer Algorithmus basiert auf der Nutzung der Methode der kleinsten Quadrate [23] und gestattet auch die Berücksichtigung der Seitenmittenknoten von Sohn-Elementen, welche durch die Vergrößerung wieder gelöscht werden müssen [30]. Für den Fall einer grünen Vergrößerung wird die zu minimierende Funktion durch

$$\begin{aligned}
 F_g = & \left( y_{(3)}^{\text{Sohn1}} - y_{(4)}^{\text{Vater}} \right)^2 + \left( y_{(3)}^{\text{Sohn2}} - y_{(4)}^{\text{Vater}} \right)^2 + \\
 & \left( y_{(2)}^{\text{Sohn1}} - y_{(3)}^{\text{Vater}} \right)^2 + \left( y_{(2)}^{\text{Sohn2}} - y_{(3)}^{\text{Vater}} \right)^2 + \\
 & \left( y_{(6)}^{\text{Sohn1}} - y_{(\xi_a)}^{\text{Vater}} \right)^2 + \left( y_{(6)}^{\text{Sohn2}} - y_{(\xi_b)}^{\text{Vater}} \right)^2 + \\
 & \left( y_{(5)}^{\text{Sohn1}} - y_{(\xi_c)}^{\text{Vater}} \right)^2 + \left( y_{(5)}^{\text{Sohn2}} - y_{(\xi_c)}^{\text{Vater}} \right)^2
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

mit den unbekannten Knotenpunktwerten  $y_{(3)}^{\text{Vater}}$  und  $y_{(4)}^{\text{Vater}}$  sowie den Abkürzungen

$$y_{(\xi_a)}^{\text{Vater}} = \sum_{k=1}^6 N_k(\xi_a) y_{(k)}^{\text{Vater}} \tag{5.38}$$

$$y_{(\xi_b)}^{\text{Vater}} = \sum_{k=1}^6 N_k(\xi_b) y_{(k)}^{\text{Vater}} \tag{5.39}$$

$$y_{(\xi_c)}^{\text{Vater}} = \sum_{k=1}^6 N_k(\xi_c) y_{(k)}^{\text{Vater}} \tag{5.40}$$

angegeben. Die Koordinaten  $\xi_a$ ,  $\xi_b$  und  $\xi_c$  kennzeichnen mit

$$\xi_a = (0,75; 0,0), \quad \xi_b = (0,25; 0,0), \quad \xi_c = (0,25; 0,5) \tag{5.41}$$

die Position der zu löschenden Seitenmittenknoten der Sohn-Elemente im Vater-Element. Mit den Bedingungen für ein Minimum

$$\frac{\partial F_g}{\partial y_{(3)}^{\text{Vater}}} = 0 \tag{5.42}$$

$$\frac{\partial F_g}{\partial y_{(4)}^{\text{Vater}}} = 0 \tag{5.43}$$

erhält man die Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Knotenpunktwerte

$$y_{(3)}^{\text{Vater}} = \frac{1}{2} \left( y_{(2)}^{\text{Sohn1}} + y_{(2)}^{\text{Sohn2}} \right) \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} y_{(4)}^{\text{Vater}} = & \left\{ -y_{(1)}^{\text{Vater}} \left[ N_1(\xi_a) N_4(\xi_a) + N_1(\xi_b) N_4(\xi_b) + 2N_1(\xi_c) N_4(\xi_c) \right] \right. \\ & - y_{(2)}^{\text{Vater}} \left[ N_2(\xi_a) N_4(\xi_a) + N_2(\xi_b) N_4(\xi_b) + 2N_2(\xi_c) N_4(\xi_c) \right] \\ & - 2 \left[ y_{(5)}^{\text{Vater}} N_4(\xi_c) N_5(\xi_c) + y_{(6)}^{\text{Vater}} N_4(\xi_c) N_6(\xi_c) \right] \\ & + \left[ y_{(5)}^{\text{Sohn1}} + y_{(5)}^{\text{Sohn2}} \right] N_4(\xi_c) + y_{(6)}^{\text{Sohn1}} N_4(\xi_a) + y_{(6)}^{\text{Sohn2}} N_4(\xi_b) \\ & \left. + y_{(3)}^{\text{Sohn1}} + y_{(3)}^{\text{Sohn2}} \right\} \frac{1}{H} \end{aligned} \quad (5.45)$$

mit

$$H = (N_4(\xi_a))^2 + (N_4(\xi_b))^2 + 2(N_4(\xi_c))^2 + 2. \quad (5.46)$$

Die Vorgehensweise für eine rote Vergrößerung ist analog. Für die übrigen Knoten des Vaterelements, bei denen eine eindeutige Zuordnung zum Knoten eines Sohn-Elementes existiert, werden die Knotenpunktwerte einfach kopiert. Die Berechnung der Feldgrößen in den GAUSS-Punkten, basierend auf den Formfunktionen, ist dann analog dem Vorgehen bei einer Verfeinerung.

Durch die Verfeinerungen bzw. Vergrößerungen im FE-Netz werden in der Regel die Gleichgewichtsbedingungen verletzt, da die Übertragung der Feldgrößen unabhängig voneinander auf das neue (Teil-)Netz erfolgt. Aus diesem Grund wird direkt im Anschluss durch so genannte Gleichgewichtssiterationen der Gleichgewichtszustand wieder hergestellt. Erst dann kann der Schritt der adaptiven Netzanpassung als beendet angesehen werden.

## 6. Kriterien für Rissausbreitung

Mit Hilfe der Bruch- und Schädigungsmechanik soll eine Beschreibung der Bauteilschädigung durch die Bildung und Ausbreitung von Rissen erfolgen. Vor allem ist die Frage, unter welchen Bedingungen und in welche Richtung ein Makroriss wächst von besonderem Interesse. Dabei wird die Phase der Rissentstehung in den nachfolgenden Betrachtungen erst einmal ausgeklammert.

### 6.1. Rissausbreitung und Bruch

Verliert ein Festkörper durch Werkstofftrennung im makroskopischen Bereich die Tragfähigkeit, so spricht man von einem Bruch dieses Körpers. Dieser Bruchvorgang ist immer mit einem Risswachstumsprozess verbunden und erst dann beendet, wenn der Riss zum Stillstand gekommen oder durch den Körper hindurchgewachsen ist. Bezüglich einer makroskopischen Sichtweise lassen sich die Art der Rissausbreitung sowie des Bruchs klassifizieren [50].

Solange ein Riss sich in seiner Größe nicht ändert, spricht man von einem stationären Riss. Wird eine kritische Beanspruchung erreicht, dann beginnt der Riss zu wachsen und er wird als instationär bezeichnet. Dabei kann man eine Unterscheidung in

- stabile Rissausbreitung und
- instabile Rissausbreitung

vornehmen. Die instabile Rissausbreitung erfolgt im Allgemeinen mit hoher Geschwindigkeit unter der Freisetzung von Energie. Dabei bleibt nach Erreichen des kritischen Beanspruchungszustandes dieser weiterhin bestehen, ohne dass ein zusätzlicher Anstieg der äußeren Last erforderlich ist. Im Gegensatz dazu erfolgt die stabile Rissausbreitung unter ständiger Energiezufuhr, d.h. es ist eine fortwährende Erhöhung der äußeren Belastung notwendig, damit der Riss weiter wachsen kann. Als subkritisches Risswachstum wird in dem Zusammenhang ein sich über einen langen Zeitraum erstreckender Prozess

der stabilen Rissausbreitung bezeichnet, welcher weit unterhalb einer kritischen Rissbeanspruchung abläuft. Des Weiteren ist eine Unterscheidung in quasistatische und dynamische Rissausbreitung möglich. In den meisten Fällen wachsen die Risse mit geringer Geschwindigkeit, so dass eine quasistatische Betrachtungsweise möglich ist, bei der man die Trägheitskräfte vernachlässigen kann.

Über das beobachtete Verformungsverhalten lässt sich der makroskopische Bruch in

- Sprödbbruch und
- duktilen Bruch (Zähbruch)

unterteilen. Der Begriff Sprödbbruch beschreibt dabei einen Bruch bei elastischen oder aber makroskopisch sehr kleinen plastischen Verformungen, welche auf die unmittelbare Umgebung der Risspitze beschränkt sind. Im Gegensatz dazu treten bei einem duktilen Bruch makroskopisch wesentlich größere plastische Verformungen am Riss auf. Nach der Art der Belastung, welche zum Bruch führt, ist letztlich eine Einteilung in

- Bruch durch Überbelastung (Duktilbruch, Sprödbbruch)
- Bruch durch Wechselbelastung (Ermüdungsbruch)
- Bruch bei langer Standzeit (Kriechbruch)

möglich.

## 6.2. Kriterium für spröde Rissausbreitung

Die maßgebliche Theorie zur Beschreibung des spröden Risswachstums ist die linear-elastische Bruchmechanik. Das makroskopische Erscheinungsbild des Sprödbruchs entspricht dem Trennbruch, d.h. die Bruchflächen verlaufen senkrecht zur größten Normalspannung  $\sigma_{\max} = \sigma_I$  [24]. Für den einfachsten Fall einer Modus-I-Beanspruchung des Risses gilt das Bruchkriterium in Gl. (3.9) und der Riss breitet sich geradlinig aus.

Für den Fall einer Mixed-Mode-Beanspruchung existiert eine Vielzahl von Rissausbreitungskriterien [100, 102, 108, 109], die sich im Ergebnis wesentlich voneinander unterscheiden können. Aufgrund verschiedenartiger Einflüsse, z.B. durch die Werkstoffstruktur, gibt es bisher kein allgemeingültig anwendbares Kriterium. Im Folgenden werden für die ebene Rissausbreitung unter einer Mixed-Mode-Beanspruchung ( $K_I > 0$ ,  $K_{II} \neq 0$ ) drei unterschiedliche Kriterien kurz vorgestellt.



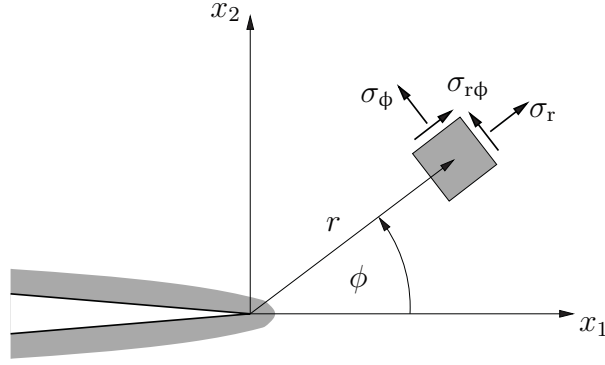


Abbildung 6.1.: Spannungen an der Risspitze in Polarkoordinaten

### Kriterium der maximalen Umfangsspannung

Ein in der Praxis sehr bewährtes Rissausbreitungskriterium ist das Kriterium der maximalen Umfangsspannung [45]. Diesem Kriterium liegt die Annahme zugrunde, dass sich ein Riss in die radiale Richtung  $\phi_0$  ausbreitet, in der die Umfangsspannung  $\sigma_\phi$  einen maximalen Wert einnimmt (vgl. Abbildung 6.1). Die Rissausbreitung wird dann initiiert, wenn die Umfangsspannung in einem festgelegten Abstand  $r_c$  von der Risspitze den gleichen kritischen Wert erreicht, den sie unter einer reinen Modus-I-Belastung mit  $K_I = K_{Ic}$  auf dem Ligament erhalten würde.

Die Umfangsspannung  $\sigma_\phi$  lässt sich über eine Transformation aus den Nahfeldlösungen (3.5) und (3.7) herleiten:

$$\sigma_\phi(\phi, r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \left( 3 \cos \frac{\phi}{2} + \cos \frac{3\phi}{2} \right) - K_{II} \left( 3 \sin \frac{\phi}{2} + 3 \sin \frac{3\phi}{2} \right) \right]. \quad (6.1)$$

Mit den Bedingungen für die Rissausbreitungsrichtung

$$\left. \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 \sigma_\phi}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=\phi_0} < 0 \quad (6.2)$$

folgt die Bestimmungsgleichung des Rissablenkungswinkels

$$\phi_0 = 2 \arctan \left( \frac{1 - \sqrt{1 + 8\varrho^2}}{4\varrho} \right), \quad \varrho = \frac{K_{II}}{K_I}, \quad (6.3)$$

welcher nur vom Verhältnis der Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{II}/K_I$  abhängt. Die Bedingung für die Initiierung der Rissausbreitung

$$\sigma_\phi^{\max} = \sigma_\phi(\phi_0, r_c) = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{2\pi r_c}} \quad (6.4)$$

ergibt dann zusammen mit Gl. (6.1) und (6.3) das Bruchkriterium

$$g(K_I, K_{II}) = K_v^\phi - K_{Ic} = 0 \quad (6.5)$$

und den Vergleichsintensitätsfaktor

$$K_v^\phi = K_I \frac{4\sqrt{2} (1 + 3\sqrt{1 + 8\varrho^2}) |\varrho^3|}{\sqrt{(12\varrho^2 + 1 - \sqrt{1 + 8\varrho^2})^3}}. \quad (6.6)$$

Für eine reine Modus-II-Belastung ( $K_I = 0$ ,  $K_{II} > 0$ ) liefert das Kriterium den maximalen Rissablenkungswinkel mit

$$\phi_0 = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} 2 \arctan \left( \frac{1 - \sqrt{1 + 8\varrho^2}}{4\varrho} \right) = -70,53^\circ. \quad (6.7)$$

und die zugehörige kritische Belastung beträgt  $K_{II} = 0,866K_{Ic}$ .

### Kriterium nach Richard

Bei dem Kriterium nach RICHARD [109] handelt es sich um ein empirisches Kriterium. Es wird der Vergleichs-Spannungsintensitätsfaktor

$$K_v^R(K_I, K_{II}) = \frac{1}{2}K_I + \frac{1}{2}\sqrt{K_I^2 + 4(\alpha_1 K_{II})^2} \quad (6.8)$$

eingeführt, der äquivalent zu einer Modus-I-Beanspruchung ist und mit  $\alpha_1$  einen Werkstoffparameter enthält. Das Bruchkriterium lautet damit

$$g(K_I, K_{II}) = K_v^R - K_{Ic} = 0. \quad (6.9)$$

Der Rissablenkungswinkel wird über die Beziehung

$$\phi_0 = n_{K_{II}} \left[ A_\phi \frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}|} + B_\phi \left( \frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}|} \right)^2 \right] \quad (6.10)$$

mit

$$n_{K_{II}} = \begin{cases} -1 & : K_{II} > 0 \\ 0 & : K_{II} = 0 \\ +1 & : K_{II} < 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

ermittelt. Dabei dienen die Parameter  $A_\phi$  und  $B_\phi$  zur Anpassung an experimentelle Ergebnisse. Mit der Vorgabe  $\alpha_1 = 1,155$ ,  $A_\phi = 140^\circ$  und  $B_\phi = -70^\circ$  erreicht man eine gute Übereinstimmung mit dem Kriterium der maximalen Umfangsspannung.

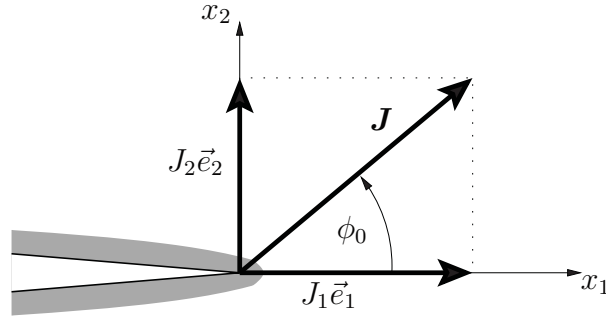


Abbildung 6.2.: J-Integralvektor an der Rissspitze

### J-Integralvektor

Eine weitere Hypothese lässt sich mit Hilfe des J-Integralvektors  $\mathbf{J}$  aus Gl. (3.11) formulieren [56]. Das Bruchkriterium erhält man analog zum Kriterium (3.17) mit

$$g(\mathbf{J}) = \bar{J} - J_c = 0, \quad (6.12)$$

wobei  $\bar{J}$  der Betrag des J-Integralvektors ist:

$$\bar{J} = |\mathbf{J}| = \sqrt{J_1^2 + J_2^2}. \quad (6.13)$$

Der kritische Materialkennwert  $J_c$  lässt sich durch Gl. (3.14) und die Bruchzähigkeit  $K_{Ic}$  mit

$$J_c = K_{Ic}^2 \frac{1 - \nu^2}{E} \quad (6.14)$$

bestimmen. Die Rissausbreitungsrichtung erhält man durch Richtung und Richtungssinn des J-Integralvektors (siehe Abbildung 6.2), so dass sich der Rissablenkungswinkel mit

$$\phi_0 = \arctan\left(\frac{J_2}{J_1}\right) \quad (6.15)$$

berechnen lässt. Mit Hilfe von Gl. (3.14) und (3.15) lassen sich das Bruchkriterium und der Rissablenkungswinkel ebenfalls durch die Spannungsintensitätsfaktoren bzw. durch ihr Verhältnis  $\varrho = K_{II}/K_I$  ausdrücken:

$$g(K_I, K_{II}) = K_I \sqrt[4]{(1 + \varrho^2)^2 + 4\varrho^2} - K_{Ic} = 0 \quad (6.16)$$

$$\phi_0 = \arctan\left(\frac{-2\varrho}{1 + \varrho^2}\right). \quad (6.17)$$

Die grafische Darstellung der Bruchgrenzkurven sowie der Rissablenkungswinkel in Abhängigkeit der Rissbeanspruchung ist für die vorgestellten Rissausbreitungskriterien in Abbildung 6.3 zu sehen. Im Vergleich mit den anderen Kriterien scheint eine praktische Anwendung des J-Integralvektors nur für  $K_{II} \ll K_I$  sinnvoll zu sein.

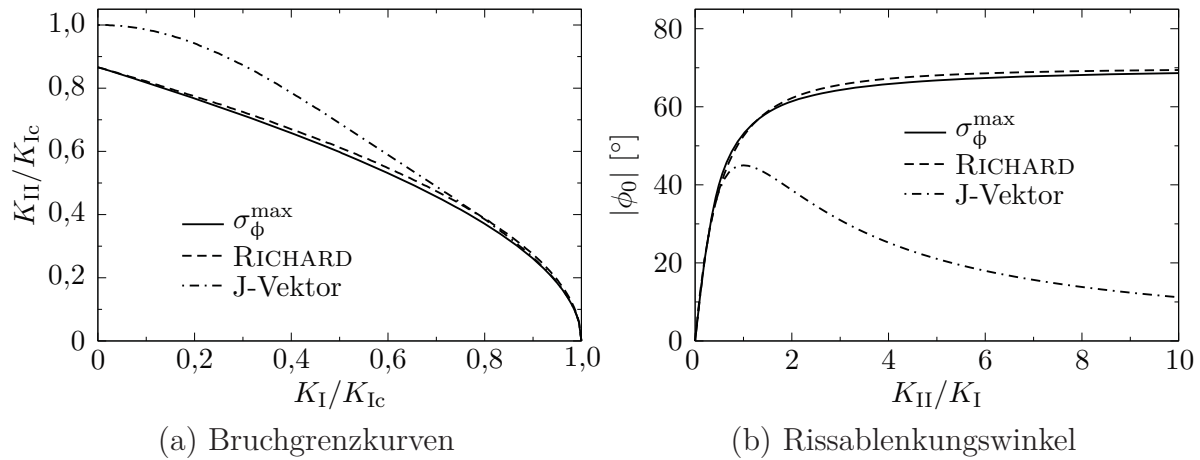


Abbildung 6.3.: Vergleich der Bruchkriterien für ebene Mixed-Mode-Rissausbreitung

### 6.3. Kriterium für Ermüdungsrisswachstum

Das Ermüdungsrisswachstum stellt die wichtigste Erscheinungsform der unterkritischen Rissausbreitung dar. Dabei vergrößert sich ein Riss allmählich unter dem Einfluss einer Wechselbelastung, die weit unterhalb einer kritischen Beanspruchung liegt. Die Rissausbreitung verläuft stabil und mit geringer Wachstumsgeschwindigkeit. Ursache des Ermüdungsrisswachstums sind mikroplastische Wechselverformungen an der Risspitze, die mit zunehmender Schädigung zu einer vollständigen Trennung des Werkstoffes führen. Aus makroskopischer Sicht ist die plastische Zone vernachlässigbar klein, so dass die Voraussetzungen für die Anwendung der linear-elastischen Bruchmechanik erfüllt sind und der Ermüdungsriss mit Hilfe des K-Konzepts beschrieben werden kann. In dem Fall kann eine Übertragung der im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten Kriterien zur Rissausbreitung erfolgen, indem statt der absoluten Werte der Spannungsintensitätsfaktoren ihre Schwingbreiten

$$\Delta K_I = K_I^{\max} - K_I^{\min}, \quad \Delta K_{II} = K_{II}^{\max} - K_{II}^{\min} \quad (6.18)$$

eingesetzt werden. Demzufolge erhält man die Schwingbreite des Vergleichs-Spannungsintensitätsfaktors  $\Delta K_v$  nach Gl. (6.8) mit

$$\Delta K_v(\Delta K_I, \Delta K_{II}) = \frac{1}{2} \Delta K_I + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta K_I^2 + 4(\alpha_1 \Delta K_{II})^2}, \quad (6.19)$$

unter der Voraussetzung, dass  $K_I$  und  $K_{II}$  zeitlich synchron oszillieren und sich ihr Verhältnis nicht ändert.

In Abbildung 6.4 ist für das Ermüdungsrisswachstum der qualitative Verlauf der Risswachstumsgeschwindigkeit  $da/dN$  in Abhängigkeit des zyklischen Vergleichs-Spannungsintensitätsfaktors dargestellt. Im Bereich 1 ist eine Makrorissausbreitung unterhalb des

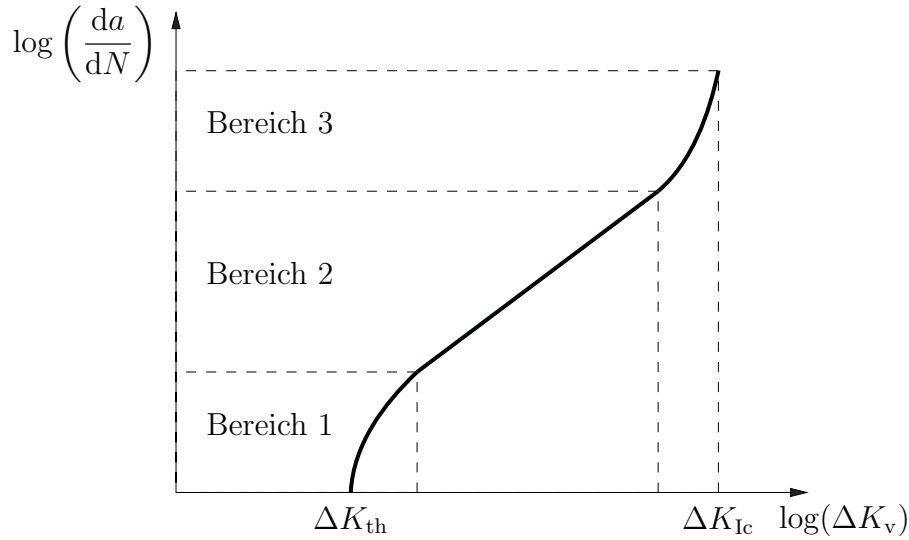


Abbildung 6.4.: Risswachstumsgeschwindigkeit als Funktion der Schwingbreite des Vergleichs-Spannungsintensitätsfaktors

Schwellenwertes  $\Delta K_{th}$  nicht möglich und repräsentiert gewissermaßen die bruchmechanische Dauerfestigkeit. Mit steigendem  $\Delta K$  nimmt die Rissausbreitungsgeschwindigkeit stark zu. Eine überwiegend lineare Risswachstumskurve ist im Bereich 2 zu sehen, deren Verlauf durch die so genannte PARIS-Gleichung [97]

$$\frac{da}{dN} = C_P (\Delta K_v)^{m_P} \quad (6.20)$$

approximiert werden kann. Der Faktor  $C_P$  und der Exponent  $m_P$  sind hierbei Werkstoffparameter. Im Bereich 3 findet mit wachsendem  $\Delta K_v$  der Übergang zu einer instabilen Rissausbreitung statt, die mit dem Erreichen von  $\Delta K_{Ic}$  eintritt. Ein Kriterium für Ermüdungsrisswachstum lässt sich dann mit

$$\Delta K_{th} \leq \Delta K_v < \Delta K_{Ic} \quad (6.21)$$

und

$$\Delta K_{Ic} = K_{Ic} \left( 1 - \frac{K_v^{\min}}{K_v^{\max}} \right) \quad (6.22)$$

formulieren.

Es existieren auch Risswachstumsgesetze, mit denen alle drei Bereiche der Risswachstumskurve beschrieben werden können [44, 69]. Durch die Integration des Risswachstumsgesetzes ist es dann möglich, die Risswachstumslänge  $\Delta a$  für eine bestimmte Anzahl von Lastzyklen zu berechnen oder es wird die Zahl der Lastzyklen bestimmt, die notwendig sind, damit ein Riss um die Länge  $\Delta a$  wachsen kann.

## 6.4. Kriterium für duktile Rissausbreitung

In metallischen Werkstoffen besteht der mikroskopische Versagensmechanismus für duktilen Bruch aus Entstehung, Wachstum und Vereinigung von Mikrohohlräumen, die mit plastischem Fließen verbunden sind. Es ist deshalb nahe liegend, zur Modellierung des duktilen Bruchs ein schädigungsmechanisches Materialmodell wie das ROUSSELIER-Modell zu verwenden. Bei diesem kontinuumsmechanischen Ansatz wird mittels der Schädigungsvariable das lokale Werkstoffversagen bei Überschreiten eines kritischen Wertes in einem Volumenelement beschrieben. Bezogen auf das Hohlraumvolumen verliert das Material dann seine Tragfähigkeit, wenn mit

$$f(\beta) \geq f_c \quad (6.23)$$

der Hohlraumvolumenanteil  $f$  den kritischen Wert  $f_c$  erreicht bzw. überschritten hat. Im Rahmen der FEM erfolgt die Auswertung des Versagenskriteriums (6.23) in den GAUSS-Punkten. Ist das Kriterium erfüllt, so wird der Verlust der Tragfähigkeit in dem Bereich durch die Reduzierung der Steifigkeit im betroffenen GAUSS-Punkt bzw. den Ausfall des gesamten Elementes simuliert. Auf diese Weise ist es möglich, die Initiierung von Rissen sowie die Rissausbreitung in Form eines schmalen Bandes ausgefallener finiter Elemente zu simulieren (siehe z.B. [103]).

Mit dem Übergang zu einem diskontinuierlichen Ansatz erfolgt die Modellierung makroskopischer Risse durch das Generieren neuer freier Oberflächen in der betrachteten Struktur und es sind entsprechende, auf der Schädigungsmechanik basierende Kriterien für die Rissausbreitung zu formulieren. In diesem Zusammenhang werden zwei Ansätze betrachtet:

### Auswertung des Hohlraumvolumens

Bei diesem Ansatz wird das Risswachstum dann initiiert, wenn der Hohlraumvolumenanteil an der aktuellen Risspitze einen kritischen Wert erreicht hat (vgl. Kriterium (6.23)). Die Rissausbreitung erfolgt dabei ausgehend von der Risspitze immer in die Richtung mit dem maximalen Hohlraumvolumen, d.h. der Riss wächst immer in den Bereich mit der aktuell stärksten Schädigung. Für die numerische Auswertung erfordert dieses Kriterium eine vergleichsweise feine und homogene Vernetzung an der Risspitze [81].

### Auswertung des akustischen Tensors

Bei diesem Konzept wird das Versagen des akustischen Tensors (Lokalisierungskriterium) an der Risspitze als Kriterium für den Beginn der Rissausbreitung angesehen. Da ohne-

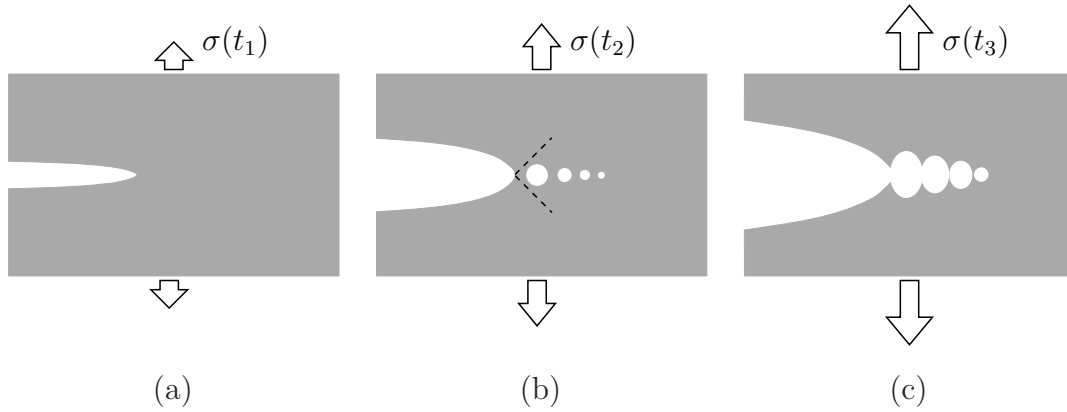


Abbildung 6.5.: Phasen des duktilen Risswachstums

hin nur bis zur Erfüllung des Lokalisierungskriteriums stabil gerechnet werden kann, ist diese Vorgehensweise einleuchtend und wird in dieser Arbeit als Kriterium für duktilen Risswachstum genutzt.

Das Versagen des akustischen Tensors markiert hierbei den Beginn einer Reihe von mikromechanischen Prozessen an der ausgerundeten Rissspitze, die letztendlich zum Bruch führen (siehe Abbildung 6.5). Zum Einen kommt es zur Entstehung von Lokalisierungszonen an der Rissspitze, die physikalisch als Gleitbänder gedeutet werden können. Zum Anderen bilden sich Mikrohohlräume vor der Rissspitze, die im weiteren Verlauf wachsen und sich zusammenschließen [61]. Das Zusammenwachsen dieser Hohlräume ist letztendlich der dominierende Prozess und es kommt zum trennflächigen duktilen Risswachstum. Die bei der Rissausbreitung wirkenden mikromechanischen Prozesse werden hierbei nicht mitmodelliert und mit dem Generieren des neuen inkrementellen Rissabschnittes im Berechnungsmodell übersprungen.

Mit dem Versagen des akustischen Tensors entstehen an der Rissspitze zwei Lokalisierungsebenen ( $\partial\gamma_1$  und  $\partial\gamma_2$  in Abbildung 6.6). Deren Lage, ausgedrückt durch die Richtung  $\theta_1$  und  $\theta_2$  der Normalenvektoren, lässt sich über die Auswertung des akustischen Tensors mit Hilfe der Vereinbarung (4.22) bestimmen. Die Richtung der Lokalisierungsebenen  $\tilde{\theta}_i$  kann man dann mit

$$\tilde{\theta}_i = \theta_i - 90^\circ \quad (6.24)$$

angeben. Experimentelle und numerische Untersuchungen haben gezeigt, dass für eine Modus-I-Belastung die Richtung der Lokalisierungsebenen  $-\tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_2 \approx 45^\circ$  ist. Davon ausgehend wird mit

$$\phi_0 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) - 90^\circ = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2) \quad (6.25)$$

ein allgemeines Kriterium für die Rissausbreitung in Richtung der Winkelhalbierenden des von den Lokalisierungsebenen eingeschlossenen Winkels postuliert. Durch numerische

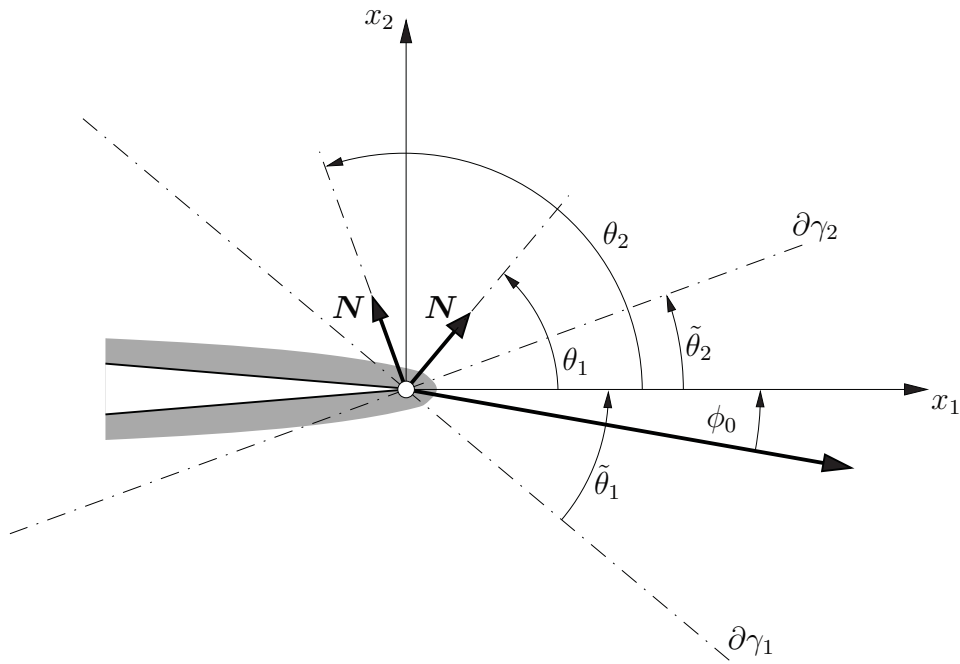


Abbildung 6.6.: Winkel an der Rissspitze

Testrechnungen für verschiedene Mixed-Mode-Belastungen hat sich gezeigt, dass die postulierte Richtung  $\phi_0$  sehr gut mit der Richtung senkrecht zur maximalen Hauptspannung übereinstimmt.



## 7. FEM-Techniken zur Simulation der Rissausbreitung

Die Simulation von Risswachstum mittels der Finite-Elemente-Methode erfolgt prinzipiell in der wiederholten Abarbeitung folgender Teilschritte:

1. FE-Analyse der Struktur mit Riss.
2. Berechnung der bruch- bzw. schädigungsmechanischen Kenngrößen.
3. Festlegung von Größe und Richtung der inkrementellen Rissausbreitung.
4. Neuvernetzung der veränderten Risskonfiguration.

Unter der Voraussetzung, dass dynamische Effekte während der Rissausbreitung vernachlässigbar sind, wird die Risswachstumssimulation als ein quasistatisches Problem betrachtet. Die verschiedenen, aufeinanderfolgenden Phasen der Rissausbreitung werden numerisch durch eine Sequenz einzelner statischer FE-Rechnungen realisiert. Die dafür notwendigen einzelnen Berechnungsmodelle unterscheiden sich bezüglich der Rissgeometrie und demzufolge auch in ihrer Vernetzung.

Je nach Problemstellung kann die Belastung schrittweise aufgebracht werden, wobei es erforderlich ist, in jedem neuen Berechnungsschritt die entsprechenden Bedingungen für Rissausbreitung zu überprüfen. Sind diese Bedingungen erfüllt, kann der Riss gemäß

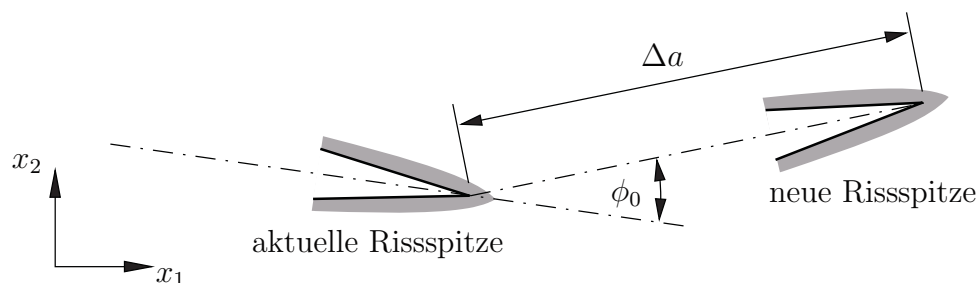


Abbildung 7.1.: Definition der neuen Risspitze

Abbildung 7.1 um die inkrementelle Länge  $\Delta a$  geradlinig in eine vorgegebene Richtung  $\phi_0$  verlängert werden.

Im Rahmen dieser Arbeit gelten folgende Einschränkungen:

- Es wird nur quasistatisches Risswachstum betrachtet.
- Beschränkung auf den ebenen Verzerrungszustand (EVZ).
- Ausschließliche Verwendung von Dreieckselementen.
- Es wird nur das Wachstum eines vorhandenen Risses simuliert.
- Die adaptive Vernetzung wird durch die hierarchische Netzanpassung realisiert.
- Es werden keine Riss-schließ- oder ähnliche Effekte berücksichtigt.

## 7.1. Allgemeines Programmschema zur Simulation von Risswachstum

Ein allgemeiner, schematischer Ablauf der Risswachstumssimulation mittels der adaptiven FEM ist in Abbildung 7.2 zu sehen. Zur Vereinfachung wurde hierbei auf die Darstellung des Prä- bzw. Postprozessors verzichtet. Prinzipiell besteht der skizzierte Algorithmus aus drei Schleifen:

- die innere Schleife ① für die adaptive Netzanpassung,
- die innere Schleife ② für das inkrementelle Risswachstum sowie
- die äußere Schleife ③ zur Lastschrittsteuerung.

Am Beginn der Simulation steht das Grobgitter-Modell der rissbehafteten Struktur. Aufgrund der einfachen FE-Vernetzung wird in der Regel zuerst die innere Schleife ① zur adaptiven Netzsteuerung durchlaufen, wobei mit jedem Schleifendurchgang die Lösung des aktuellen FE-Problems erfolgt. Anschließend erfolgt durch die lokale Verfeinerung bzw. Vergrößerung des finiten Elementnetzes eine schrittweise qualitative Anpassung der FE-Vernetzung bezüglich der aktuellen Belastung und Rissgeometrie. Zur Realisierung der gewünschten Netzfeinheit ist in der Regel ein mehrfaches Abarbeiten dieser Schleife notwendig, da infolge der hierarchischen Netzanpassung pro Durchlauf ein einzelnes

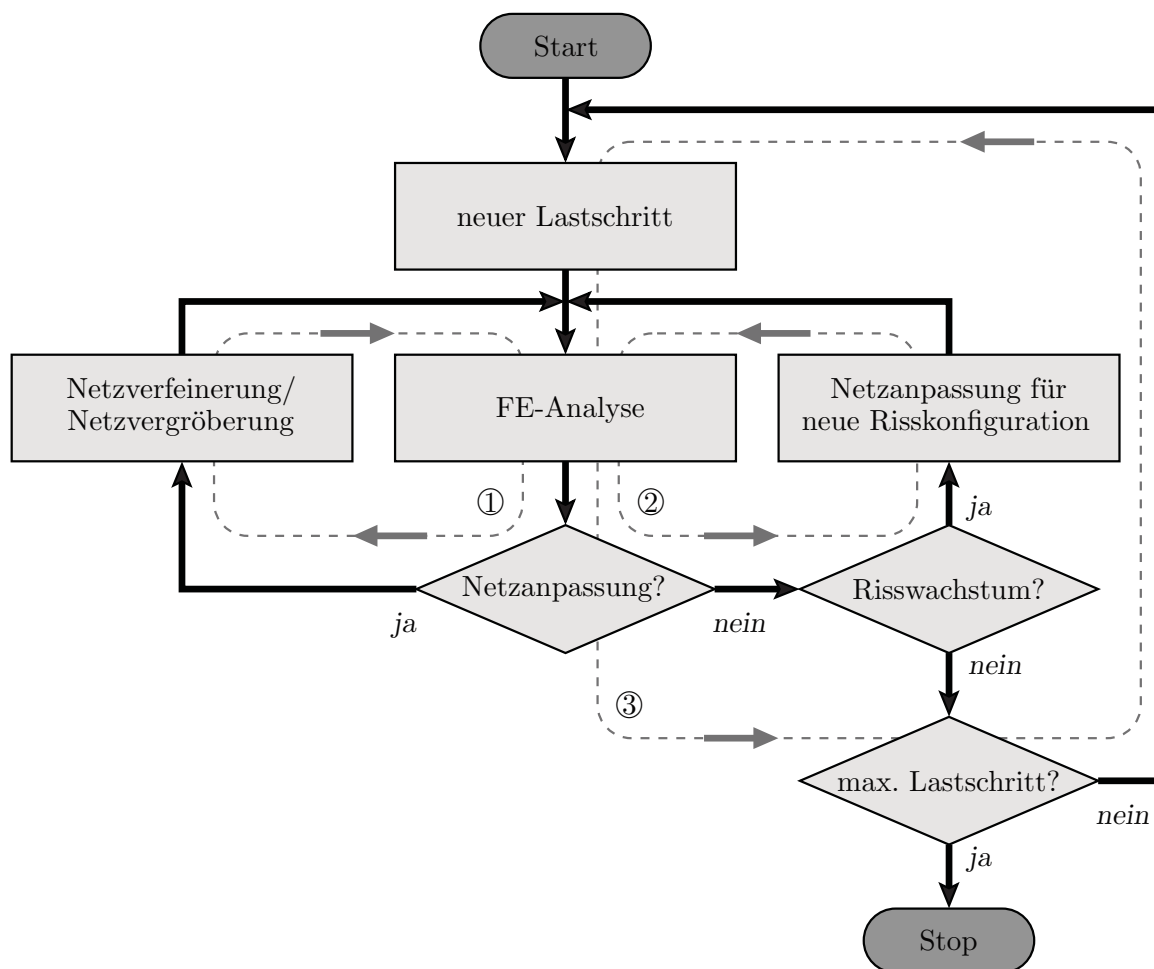


Abbildung 7.2.: Allgemeines Programmschema zur Risswachstumssimulation

Element maximal gevierteilt<sup>1</sup> werden kann. Nach Erreichen der geforderten Netzqualität wird das Kriterium für Risswachstum geprüft. Ist dieses erfüllt, durchläuft dann der Algorithmus die Risswachstumsschleife ②. Es werden Größe und Richtung der inkrementellen Rissausbreitung bestimmt und das Elementnetz dem neuen Rissverlauf angepasst. Erfolgt dabei eine Zerlegung des bestehenden Gesamtnetzes in zwei einzelne Teilnetze, dann ist der Riss durch das Bauteil hindurch gewachsen und die Simulation wird an dieser Stelle abgebrochen.

Nach erfolgreicher Rissausbreitung wird wieder die Schleife zur adaptiven Anpassung des FE-Netzes ausgeführt und der obige Vorgang wiederholt sich im aktuellen Lastschritt solange, bis das Kriterium für Risswachstum nicht mehr erfüllt ist. Danach wird durch

<sup>1</sup>Analog dazu können maximal 4 Elemente pro Schleifendurchlauf zu einem Element „vergrößert“ werden, insofern eine Vater-Sohn-Beziehung zwischen diesen Elementen existiert.

die äußere Schleife ③ zur Lastschrittsteuerung die Belastung entsprechend der Simulationvorgabe erhöht und die Berechnung fortgesetzt. Für den Fall, dass der aktuelle Lastschritt schon der maximale ist, wird die Analyse der Rissausbreitung beendet.

## 7.2. Simulation von Risswachstum für linear-elastisches Materialverhalten

Das im Folgenden vorgestellte Programm zur Simulation von Risswachstum in linear-elastischem Material ist die Weiterentwicklung des experimentellen adaptiven Finite-Elemente-Programms SPC-PM2Ad [84]. Mit der Beschränkung auf kleine Deformationen kann die Simulation als eine fortlaufende Reihe einzelner, von einander unabhängiger FE-Analysen angesehen werden. Dabei wird eine Abfolge von quasistatischen Gleichgewichtszuständen für die verschiedenen Phasen der Simulation betrachtet, bei denen sich Belastung, Rissgeometrie und damit auch die Vernetzung des Berechnungsmodells der rissbehafteten Struktur ändern.

Der schematische Programmablauf zur Risswachstumssimulation ist in Abbildung 7.3 zu sehen und basiert auf dem allgemeinen Ablaufplan in Abschnitt 7.1. Direkt im Anschluss an die FE-Analyse erfolgt zusätzlich in jedem Schleifendurchlauf die Berechnung des reduzierten elementbasierten Fehlerindikators (5.22) für alle aktiven finiten Elemente. Die Elemente, welche das Kriterium (5.26) erfüllen, werden dann zur Elementteilung bzw. bei Erfüllung des Kriteriums (5.28) zur Vergrößerung markiert. Anschließend wird der Algorithmus zur Bestimmung der bruchmechanischen Beanspruchungsparameter  $K_I$  und  $K_{II}$  an der aktuellen Risspitze ausgeführt und anhand der numerischen Genauigkeit der K-Faktoren eine Beurteilung der Vernetzungsqualität durchgeführt. Als Risswachstumskriterium kommt hier das Kriterium der maximalen Umfangsspannung zur Anwendung. Die Größe des inkrementellen Risswachstums wird über einen Parameter vorgegeben.

### 7.2.1. Berechnung der K-Faktoren

Durch das gewählte Konzept der hierarchischen Netzverfeinerung in Kapitel 5.3 können während der Risswachstums-Simulation keine speziellen Anforderungen an die Risspitzen-Vernetzung bezüglich der Netzsymmetrie, der Elementgröße oder der Position von Elementknoten gestellt werden. Für die Berechnung der bruchmechanischen Beanspruchungsparameter  $K_I$  und  $K_{II}$  ist deshalb eine Methodik erforderlich, deren Funktion von der Struktur der Rissvernetzung unabhängig ist. Deshalb bietet sich hier die Nutzung der J-Integraltechnik in Form des Interaction-Integrals (3.22)-(3.24) an, um eine sehr genaue Bestimmung der benötigten Spannungsintensitätsfaktoren zu erreichen.

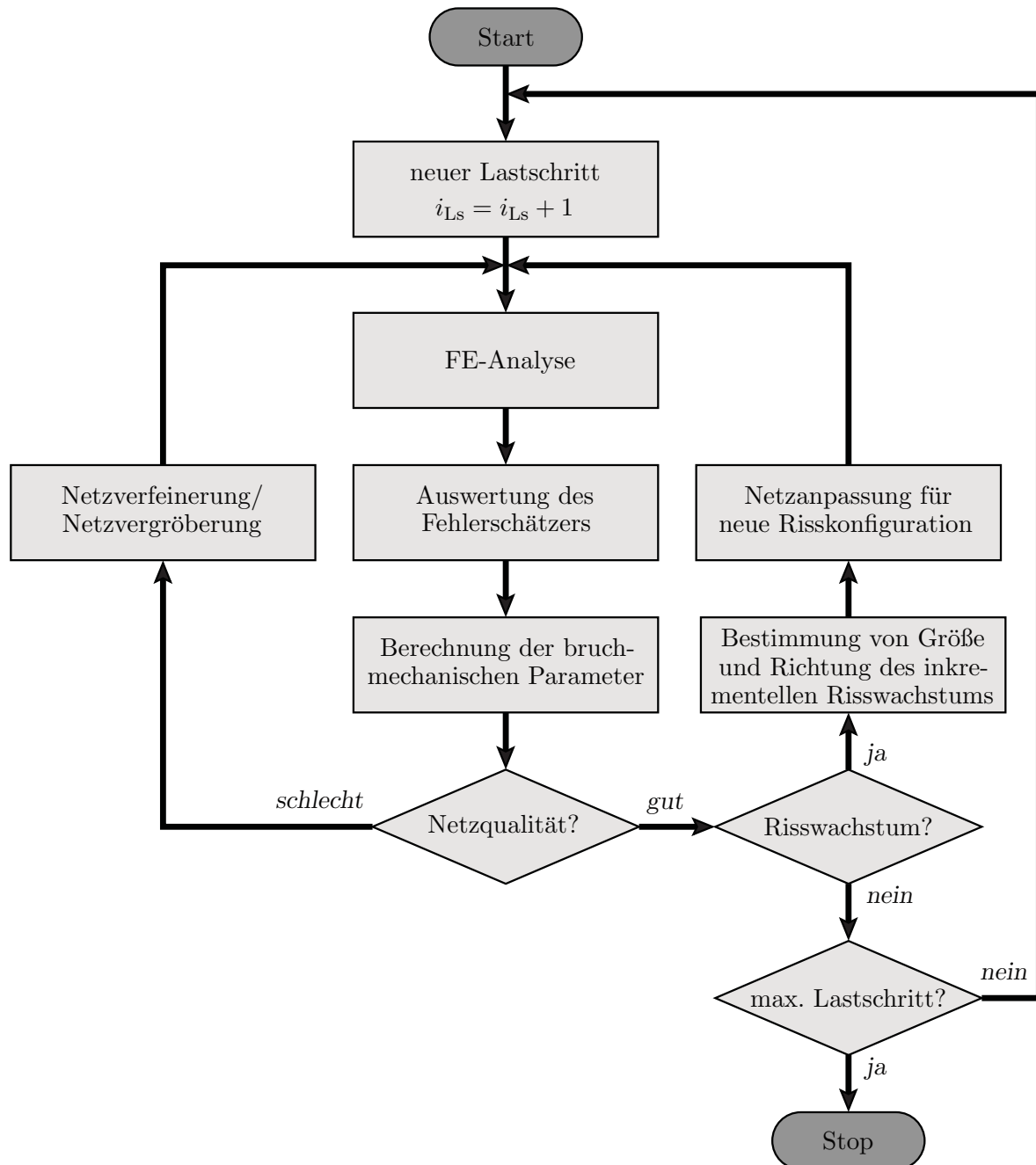


Abbildung 7.3.: Programmschema der Risswachstumssimulation für linear-elastisches Materialverhalten

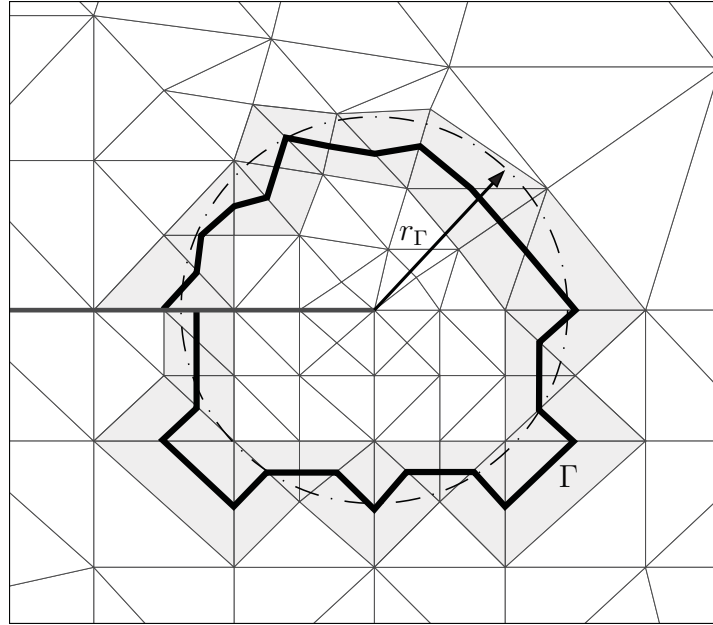


Abbildung 7.4.: Bestimmung der Berechnungskontur im FE-Netz

Die Basis für die Berechnung bildet eine Berechnungskontur, welche von einem Rissufer zum gegenüberliegenden Rissufer verläuft und dabei die Risspitze mit einschließt. Um den numerischen Aufwand entsprechend zu minimieren wird das Interaction-Integral mit

$$I^{12} = \sum_{m=1}^{n_{\Gamma_e}} I_m^{12} = \sum_{m=1}^{n_{\Gamma_e}} \int_{\Gamma_m^e} \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \delta_{1k} - \sigma_{ik}^{(1)} u_{i,1}^{(2)} - \sigma_{ik}^{(2)} u_{i,1}^{(1)} \right] n_k \, ds \quad (7.1)$$

in eine Summe von Teilintegralen zerlegt, wobei  $n_{\Gamma_e}$  die Anzahl der Finiten Elemente (Konturelemente) ist, durch welche die Berechnungskontur verläuft und  $\Gamma_m^e$  die Teilkontur innerhalb eines Konturelements. Dabei wird die Teilkontur immer als Gerade zwischen zwei Kantenmittenknoten festgelegt. Weiterhin wird auf eine Mittelung der Knotenwerte an den Elementgrenzen zum Nachbarelement verzichtet, d.h. es wird mit den jeweiligen lokalen Knotenwerten des Finiten Elements gearbeitet.

Für die Bestimmung der Berechnungskontur wird ein Suchkreis vorgegeben, dessen Kreismittelpunkt sich auf der aktuellen Risspitze befindet. Der Radius  $r_{\Gamma}$  des Suchkreises ist hier der Parameter, der die Größe und den Verlauf der Berechnungskontur näherungsweise vorgeben soll (siehe Abbildung 7.4). Zur Bestimmung der Kontur  $\Gamma$  und der zugehörigen Konturelemente werden alle Elementkanten um die Risspitze abgetestet. Befindet sich ein Endknoten der getesteten Elementkante innerhalb des Suchkreises bzw. auf ihm und der gegenüberliegende Kanten-Endknoten außerhalb, dann gilt diese Elementkante als vom Suchkreis geschnitten und wird markiert. Das dazu gehörende Element wird als Konturelement markiert. Durch die ausschließliche Verwendung von Dreieckselementen werden immer zwei Elementkanten des Konturelements vom Suchkreis geschnitten

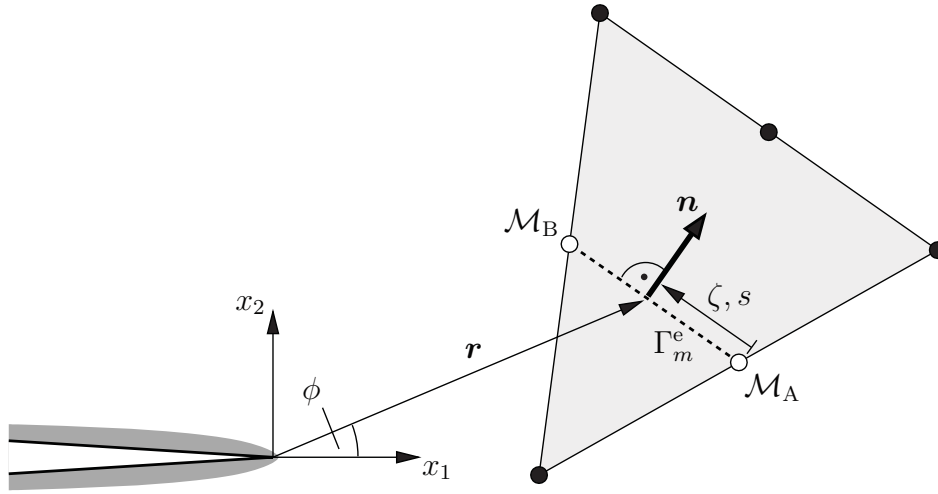


Abbildung 7.5.: Teilkontur in einem Konturelement

und die Berechnungskontur in diesem Element verläuft damit geradlinig zwischen den Mittenknoten der markierten Elementkanten.

Zur Gewährleistung der Wegunabhängigkeit des Interaction-Integrals muss der Riss direkt hinter der Risspitze unbedingt einen geradlinigen Verlauf haben. Mit der Größenvorgabe für  $r_\Gamma$  muss weiterhin sichergestellt werden, dass die Berechnungskontur in jedem Fall an diesem geraden Abschnitt des Risses beginnt bzw. endet.

Im Folgenden wird ein beliebiges Konturelement betrachtet (siehe Abbildung 7.5). Die Berechnungskontur im Element verläuft mit der dimensionslosen Koordinate  $\zeta$  ( $0 \leq \zeta \leq 1$ ) vom Mittenknoten  $\mathcal{M}_A$  ( $\zeta = 0$ ) zum Mittenknoten  $\mathcal{M}_B$  ( $\zeta = 1$ ). Mit der Voraussetzung eines quadratischen Verschiebungsansatzes ist der Verlauf der Verschiebungsableitungen, der Spannungen und der Verzerrungen innerhalb eines Finiten Elementes linear. Somit sind die in Gl. (7.1) benötigten Komponenten für den Zustand 1 (FE-Lösung) entlang der geraden Teilkontur im Konturelement durch eine einfache lineare Interpolation mit

$$\sigma_{ij}^{(1)}(\zeta) = \sigma_{ij}^{(1)A} + \left( \sigma_{ij}^{(1)B} - \sigma_{ij}^{(1)A} \right) \zeta \quad (7.2)$$

$$u_{i,1}^{(1)}(\zeta) = u_{i,1}^{(1)A} + \left( u_{i,1}^{(1)B} - u_{i,1}^{(1)A} \right) \zeta \quad (7.3)$$

an der Position  $\zeta$  bestimmbar. Dabei sind  $\sigma_{ij}^{(1)A}$ ,  $\sigma_{ij}^{(1)B}$ ,  $u_{i,1}^{(1)A}$  und  $u_{i,1}^{(1)B}$  die jeweiligen Komponenten des Spannungs- und des Verschiebungsgradiententensors an den Kantenmittenknoten  $\mathcal{M}_A$  bzw.  $\mathcal{M}_B$ . Die Werte dieser Komponenten werden durch das FE-Programm an den Knoten bereitgestellt.

Die Komponenten  $\sigma_{ij}^{(2)}$  und  $u_{i,j}^{(2)}$  des Zustandes 2 (asymptotische Nahfeldlösung) können

mit den Gln. (3.5), (3.7), (3.25), (3.26) und der Substitution der Polarkoordinaten mit

$$r = \sqrt{r_1(\zeta)^2 + r_2(\zeta)^2} \quad (7.4)$$

$$\phi = \text{atan}(r_2(\zeta), r_1(\zeta)) \quad (7.5)$$

$$r_i(\zeta) = x_i^A + (x_i^B - x_i^A) \zeta \quad (7.6)$$

ebenfalls in Abhängigkeit von  $\zeta$  geschrieben werden. Hier sind  $x_i^A, x_i^B$  die jeweiligen Koordinaten der Mittenknoten  $\mathcal{M}_A$  und  $\mathcal{M}_B$  und die Funktion  $\text{atan}$  ist durch

$$\text{atan}(r_2, r_1) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{r_2}{r_1}\right) & : r_1 > 0 \\ \arctan\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \pi & : r_1 < 0, r_2 \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - \pi & : r_1 < 0, r_2 < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & : r_1 = 0, r_2 > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & : r_1 = 0, r_2 < 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

bestimmt. Die Komponenten  $n_k$  des Normalenvektors berechnen sich mit

$$n_1 = \frac{1}{l_\Gamma^e} (x_2^B - x_2^A) \quad (7.8)$$

$$n_2 = \frac{1}{l_\Gamma^e} (x_1^A - x_1^B) \quad (7.9)$$

und die Konturlänge im Element ist

$$l_\Gamma^e = \sqrt{(x_1^A - x_1^B)^2 + (x_2^A - x_2^B)^2}. \quad (7.10)$$

Mit

$$ds = l_\Gamma^e d\zeta \quad (7.11)$$

lässt sich das Integral  $I_m^{12}$  entlang der Kontur  $\Gamma_m^e$  in einem Finiten Element als

$$I_m^{12} = \int_{\zeta=0}^1 \left[ \sigma_{ij}^{(1)}(\zeta) \varepsilon_{ij}^{(2)}(\zeta) \delta_{1k} - \sigma_{ik}^{(1)}(\zeta) u_{i,1}^{(2)}(\zeta) - \sigma_{ik}^{(2)}(\zeta) u_{i,1}^{(1)}(\zeta) \right] n_k l_\Gamma^e d\zeta \quad (7.12)$$



schreiben. Unter Zuhilfenahme der Definitionen

$$I_m^I = \frac{1}{K_I^{(2)}} I_m^{12} \left( K_{II}^{(2)} = 0 \right) \quad (7.13)$$

$$I_m^{II} = \frac{1}{K_{II}^{(2)}} I_m^{12} \left( K_I^{(2)} = 0 \right) \quad (7.14)$$

ist dann die Bestimmung der gesuchten Spannungsintensitätsfaktoren mit

$$K_I = K_I^{(1)} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \sum_{m=1}^{n_{\Gamma_e}} I_m^I \quad (7.15)$$

$$K_{II} = K_{II}^{(1)} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \sum_{m=1}^{n_{\Gamma_e}} I_m^{II} \quad (7.16)$$

möglich. Die hierfür benötigten Integrale  $I_m^I$  und  $I_m^{II}$  sind im Anhang C aufgeführt und unter der Beachtung der Vereinbarungen in Gl. (7.7) auch lösbar. In dieser Arbeit wurde mit der SIMPSON-Regel ein etabliertes numerisches Integrationsverfahren genutzt.

### 7.2.2. Algorithmus zur adaptiven Risserweiterung im FE-Netz

Im Anschluss an die bruchmechanische Auswertung lässt sich bei Erfüllung des Risswachstumskriteriums die Richtung  $\phi_0$  für die inkrementelle Rissausbreitung bestimmen. Die Länge  $\Delta a$  ist ein vorgegebener Modellparameter. Aufgabe des nun folgenden Algorithmus ist es, die Vernetzung an der Rissspitze entlang der durch  $\phi_0$  und  $\Delta a$  vorgegebenen Strecke in der Weise zu modifizieren, so dass ein anschließendes Auftrennen des Netzes und damit eine Rissverlängerung im Berechnungsmodell möglich ist. Die bestehende hierarchische Datenstruktur darf dabei aber nicht durch die Veränderung des Netzes zerstört werden. Es ist deshalb nahe liegend, diese Anpassung mit Hilfe der schon vorhandenen adaptiven Methoden der Elementteilung (rote bzw. grüne Teilung) durchzuführen.

In der aktuellen Vernetzung in Abbildung 7.6a wird von der derzeitigen Rissspitze  $\mathcal{P}_S$  zur neuen Rissspitze  $\mathcal{P}_S'$  eine Strecke  $L = (\mathcal{P}_S, \mathcal{P}_S')$  definiert, entlang derer die neue Rissfläche generiert werden soll. Dazu müssen neue Kanten sowie neue Knoten entlang dieser Strecke erzeugt werden. In der gegebenen Vernetzung wird deshalb für jede Kante  $\mathcal{K} = (\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B)$ , mit  $\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B$  als die Kanten-Endknoten, der Schnittpunkt  $\mathcal{P}_X$  mit der Strecke  $L$  gesucht. Wenn dieser Schnittpunkt existiert, dann gilt unter Zuhilfenahme einer dimensionslosen Koordinate  $\zeta$ , welche vom Knoten  $\mathcal{P}_A$  zum Knoten  $\mathcal{P}_B$  verläuft, die Beziehung

$$\mathcal{P}_X = (1 - \zeta) \mathcal{P}_A + \zeta \mathcal{P}_B \quad (7.17)$$

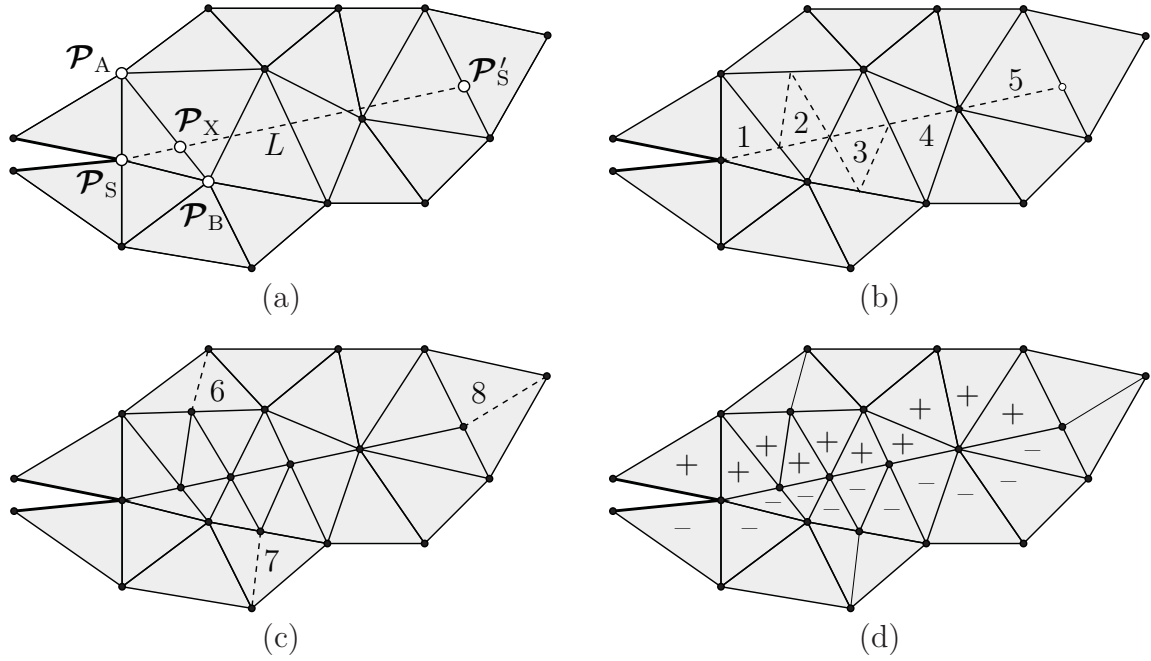


Abbildung 7.6.: Phasen der adaptive Rissweiterung

mit  $0 \leq \zeta \leq 1$  und  $\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B \in \mathcal{R}^2$ . Für die betreffende Kante  $\mathcal{K}$  wird dann folgender Algorithmus schrittweise abgearbeitet:

1. Auf der Kante  $\mathcal{K}$  wird für den Schnittpunkt  $\mathcal{P}_X$  die Koordinate  $\zeta$  berechnet.
2. Ist  $\zeta \leq \zeta_\epsilon$ , dann wird der Knoten  $\mathcal{P}_A$  auf den Schnittpunkt  $\mathcal{P}_X$  verschoben.  
Ist  $\zeta \geq (1 - \zeta_\epsilon)$ , dann wird der Knoten  $\mathcal{P}_B$  auf den Schnittpunkt  $\mathcal{P}_X$  verschoben.
3. Gilt  $\zeta_\epsilon < \zeta < (1 - \zeta_\epsilon)$ , dann wird der Mittenknoten der Kante  $\mathcal{K}$  auf den Schnittpunkt  $\mathcal{P}_X$  verschoben und die Kante in die zwei Teilkanten  $\mathcal{K}_a = (\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_X)$  und  $\mathcal{K}_b = (\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_B)$  geteilt.

Die Größe  $\zeta_\epsilon$  ist hierbei ein festzulegender Grenzwert. Bei der Verschiebung eines Endknotens der Kante zum Punkt  $\mathcal{P}_X$  muss dann selbstverständlich die Position der Mittenknoten aller angrenzenden Kanten neu berechnet werden.

Anschließend werden alle Elemente, bei denen zwei Elementkanten durch die Strecke  $L$  geschnitten werden, durch eine rote Teilung verfeinert (in Abbildung 7.6b die Elemente 2 und 3). Eine grüne Teilung erfolgt für die Elemente, welche nur an einer Elementkante geschnitten werden (in Abbildung 7.6b die Elemente 1, 4 und 5). Aus Gründen der Netzkompatibilität teilt man dann noch einige Elemente grün (in Abbildung 7.6c die Elemente 6, 7 und 8), während die restlichen Elemente unverändert bleiben. Durch diesen einfachen

Algorithmus werden entlang der Strecke  $L$  im Elementnetz neue Kanten erzeugt. Durch die Möglichkeit, einen entsprechenden Kantenknoten bei Bedarf zum Schnittpunkt  $\mathcal{P}_x$  zu verschieben, vermeidet man zudem sehr ungünstige Elementformen, d.h. sehr kleine oder in die Länge gezogene Elemente, welche aufgrund einer Elementteilung entstanden wären. Ein Wert von  $\zeta_\epsilon = 0,1$  hat sich dabei als sehr günstig erwiesen.

Das anschließende Auftrennen des Netzes kann hinsichtlich der Erhaltung der hierarchischen Datenstruktur nur auf der Ebene der finiten Elemente erfolgen. Für jeden Elementknoten entlang der Strecke  $L$  werden deshalb eine Knotenkopie und ein entsprechender Verweis in der Datenstruktur erzeugt. Den Elementen am negativen Rissufer (in Abbildung 7.6d durch ein Minus gekennzeichnet) wird dann der Originalknoten zugeordnet und den Elementen am positiven Rissufer die Knotenkopie. Dadurch bleibt die hierarchische Datenstruktur konsistent und die Anwendung einer effizienten Vorkonditionierung, basierend auf dem Kanten-Teilungsbaum [86], ist weiterhin ohne Einschränkung für den verwendeten iterativen CG-Solver möglich.

### 7.2.3. Qualitative Bewertung der Vernetzung

Das verwendete Verfeinerungskriterium (5.26) basiert auf dem relativen Fehlervergleichswert  $\bar{\eta}_E$ , der in jedem Berechnungsschritt der Simulation neu ermittelt wird. Dadurch findet man immer wieder Elemente zur Verfeinerung. Aus diesem Grund ist ein Kriterium erforderlich, welches durch eine Bewertung der Vernetzungsqualität den Abbruch der adaptiven Netzanpassung gestattet.

Entscheidend für die Qualität der Risswachstumssimulation ist vor allem die FE-Vernetzung in der Umgebung der Rissspitze, da aus den berechneten Verschiebungen der umliegenden Elementknoten mit Hilfe des J-Integrals die Rissbeanspruchungsparameter  $K_I$  und  $K_{II}$  bestimmt werden. Es ist deshalb nahe liegend, die Qualität der Rissspitzenvernetzung anhand der Genauigkeit von  $K_I$  und  $K_{II}$  zu bewerten. Aufgrund der Wegeunabhängigkeit des J-Integrals in Form des Interaction-Integrals (3.22) lässt sich diese Genauigkeit sehr einfach abschätzen, indem die Spannungsintensitätsfaktoren mittels verschiedener Berechnungskonturen  $\Gamma_n$  um die Rissspitze (siehe Abbildung 7.7) ermittelt und die Ergebnisse miteinander verglichen werden. Hierzu wurde mit

$$\frac{1}{\bar{K}_I} \left[ \max_{\forall \Gamma_n} (K_I) - \min_{\forall \Gamma_n} (K_I) \right] \leq \epsilon_J \quad (7.18)$$

$$\frac{1}{\bar{K}_{II}} \left[ \max_{\forall \Gamma_n} (K_{II}) - \min_{\forall \Gamma_n} (K_{II}) \right] \leq \epsilon_J \quad (7.19)$$

ein einfaches Bewertungskriterium entwickelt. Die Funktionen  $\max$  und  $\min$  bestimmen hierbei jeweils den größten und kleinsten Wert der berechneten  $K_I$ - bzw.  $K_{II}$ -Werte und

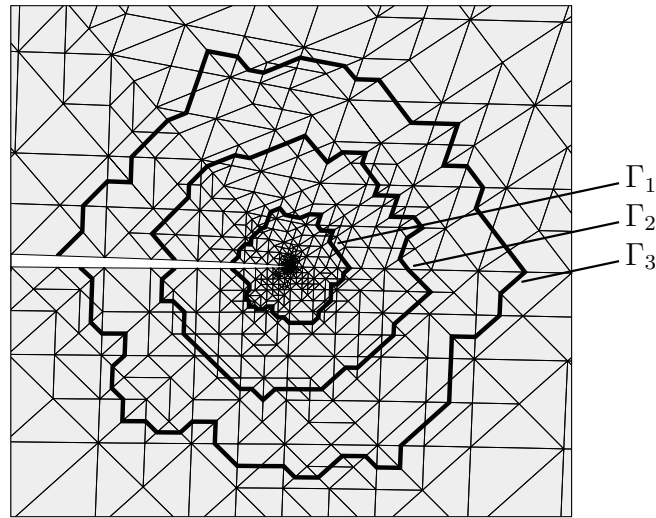


Abbildung 7.7.: Risspitze mit drei verschiedenen Berechnungskonturen

mit

$$\bar{K}_I = \frac{1}{n_\Gamma} \sum_{n=1}^{n_\Gamma} K_I|_{\Gamma=\Gamma_n} \quad (7.20)$$

$$\bar{K}_{II} = \frac{1}{n_\Gamma} \sum_{n=1}^{n_\Gamma} K_{II}|_{\Gamma=\Gamma_n} \quad (7.21)$$

werden die Mittelwerte der Spannungsintensitätsfaktoren definiert.  $n_\Gamma$  ist hierbei die Anzahl der berücksichtigten Konturen und  $\epsilon_J$  ist ein vorzugebender Wert für die geforderte Genauigkeit der bruchmechanischen Parameter.

Zur Anwendung des Kriteriums sind minimal zwei verschiedene Konturen erforderlich. Damit die Vernetzung um die Risspitze als qualitativ gut bewertet werden kann, müssen die Kriterien (7.18) und (7.19) erfüllt sein. Aufgrund der numerischen Ungenauigkeiten ist es jedoch zweckmäßig, bei der Bestimmung von  $K_{II}$  auf die Erfüllung des Kriteriums (7.19) zu verzichten, wenn  $K_{II}$  gegenüber  $K_I$  sehr klein oder nahe Null ist. Trotz fortlaufender Verfeinerung der Vernetzung um die Risspitze ist dann im Allgemeinen keine dem Qualitätskriterium<sup>2</sup> angemessene Berechnung von  $K_{II}$  mehr möglich.

Da aufgrund des singulären Charakters der Risspitze dort auch der größte Fehler in den Elementen zu erwarten ist, kann man davon ausgehen, dass alle anderen Bereiche im Berechnungsmodell bei Erfüllung der Kriterien (7.18) und (7.19) adäquat vernetzt sind.

---

<sup>2</sup>sinnvolle Werte für  $\epsilon_J$  vorausgesetzt

## 7.3. Simulation von Risswachstum für elasto-plastisches Materialverhalten

Das hier vorgestellte Programm zur Simulation von Risswachstum in elasto-plastischem Material ist die Weiterentwicklung des experimentellen adaptiven Finite-Elemente-Programms SPC-PM2AdNI [29]. Die numerische Simulation wird hierbei als eine fortlaufende Reihe nichtlinearer FE-Analysen mit veränderter Risskonfiguration konzipiert. Als nicht-lineares Materialmodell kommt das in Abschnitt 4.2 vorgestellte ROUSSELIER-Modell zur Anwendung und wird durch die nichtlokale Regularisierung (4.23) erweitert. Das Risswachstumskriterium basiert auf der Auswertung des akustischen Tensors.

Der schematische Programmablauf ist in Abbildung 7.8 zu sehen und beruht auf dem Entwurf in Abschnitt 7.1. Direkt im Anschluss an die FE-Analyse wird die nichtlokale Regularisierung durchgeführt. Danach erfolgt die Berechnung des Fehlerschätzers und durch dessen Auswertung werden Elemente mittels einer Markierung zur Verfeinerung bzw. Vergrößerung gekennzeichnet. Außerdem findet eine Kontrolle der aktuellen FE-Vernetzung statt, bei der aufbauend auf der Analyse der Elementgeometrie sowie der berechneten Schädigung in den GAUSS-Punkten die Markierung zur Netzanpassung für bestimmte Elemente zusätzlich gesetzt oder wieder gelöscht wird. Sind dann noch Markierungen zur Verfeinerung oder Vergrößerung vorhanden, durchläuft der Algorithmus die Schleife zur adaptiven Netzanpassung.

Ist eine Netzanpassung nicht notwendig, werden in den Elementen auf den Knotenpositionen sowie auf der Position des gegenwärtigen Rissspitzenknoten die Materialgleichungen für den aktuellen Lastschritt numerisch gelöst und die neuen Zustandsgrößen ermittelt. Der akustische Tensor wird am Rissspitzenknoten numerisch berechnet und ausgewertet. Ist das Kriterium für duktilen Risswachstum erfüllt, durchläuft der Algorithmus im weiteren Verlauf die Risswachstumsschleife.

Erfolgt im Rahmen der Simulation eine adaptive Anpassung des FE-Netzes, so wird anschließend die FE-Analyse für den gleichen Lastschritt wiederholt durchgeführt. Andernfalls basiert die weitere FE-Rechnung auf einer vom Fehlerschätzer als zu ungenau bewerteten numerischen Lösung, wobei der Fehler erheblich sein kann [54]. Zu Beginn der Netzmodifikation ist es deshalb unbedingt notwendig, die Zustandsvariablen in den Elementknoten und GAUSS-Punkten auf den Anfang des jeweiligen Lastschrittes zurückzusetzen. Sind die Veränderungen in der Vernetzung erfolgt, werden die Zustandsgrößen vom alten auf das neue Netz transferiert. Aufgrund von numerischen Ungenauigkeiten bei der Transformation ist in der Regel das Gleichgewicht im Berechnungsmodell gestört und wird im Anschluss in einer Gleichgewichtssiteration wieder hergestellt.

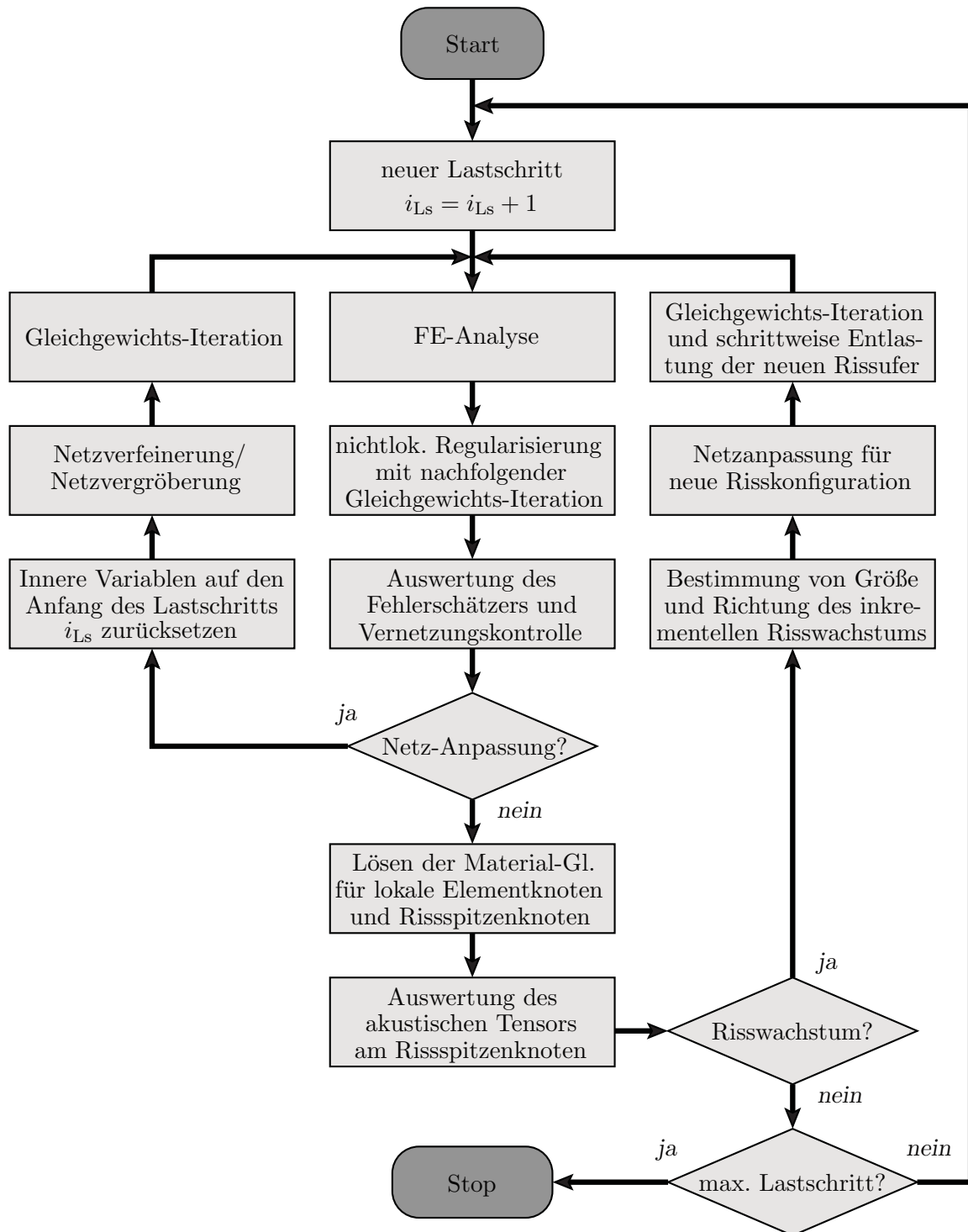


Abbildung 7.8.: Programmschema der Risswachstumssimulation für nichtlineares elastoplastisches Materialverhalten

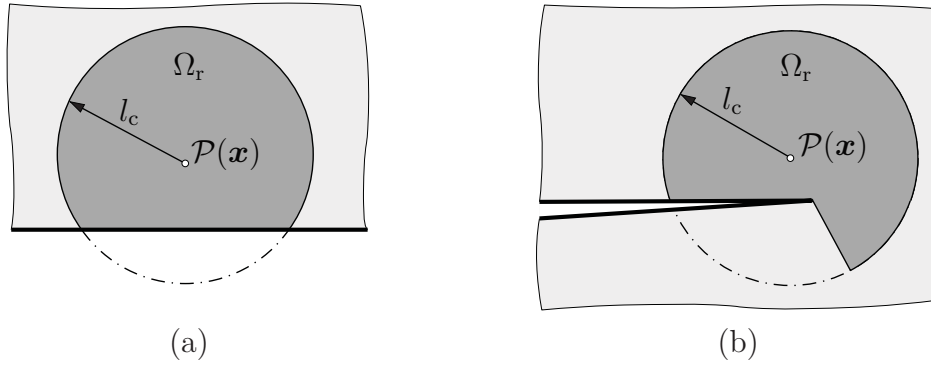


Abbildung 7.9.: Reduzierung des repräsentativen Elements

### 7.3.1. Nichtlokale Regularisierung

Die nichtlokale Regularisierung ist in diesem Programm als explizite Nachlaufrechnung realisiert und wird direkt im Anschluss an die FE-Analyse durchgeführt. Auf der Grundlage der FE-Vernetzung und des Konzepts der GAUSS-Integration erfolgt die näherungsweise Bestimmung des Integrals (4.23) mit

$$\Delta \bar{\beta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\bar{\Omega}_r(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^{n_\Omega} \Delta \tilde{\beta}(\mathbf{x} + \mathbf{s}_i) \quad (7.22)$$

als die Summe der gewichteten GAUSS-Punktwerte

$$\Delta \tilde{\beta}(\mathbf{x} + \mathbf{s}_i) = \Delta \beta(\mathbf{x} + \mathbf{s}_i) \alpha(\mathbf{s}_i) \tilde{\omega}_i. \quad (7.23)$$

Die Anzahl der im Gebiet  $\Omega_r$  für die Regularisierung berücksichtigten GAUSS-Punkte wird mit  $n_\Omega$  bezeichnet und  $\mathbf{s}_i$  ist der Abstandsvektor des GAUSS-Punktes  $i$  vom Mittelpunkt  $\mathbf{x}$ . Für den Faktor

$$\tilde{\omega}_i = \omega_k \det(\hat{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\xi}_k)) \quad (7.24)$$

erfolgt die Bestimmung des Wichtungsfaktors  $\omega_k$  und der Jacobi-Determinante  $\hat{\mathbf{J}}$  in Abhängigkeit der lokalen Elementkoordinaten  $\boldsymbol{\xi}_k$  des betrachteten GAUSS-Punktes<sup>3</sup>. Die numerisch berücksichtigte Fläche des repräsentativen Elements  $\Omega_r$  wird mit

$$\bar{\Omega}_r(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_\Omega} \tilde{\omega}_i \quad (7.25)$$

berechnet und kann vom analytischen Wert deutlich abweichen. Schneidet das repräsentative Element den Rand der betrachteten Struktur, so wird es entsprechend Abbildung

<sup>3</sup>siehe Tabelle B.2 im Anhang B

7.9a reduziert. Ebenso hat der Riss eine abschirmende Wirkung auf den Regularisierungsprozess. Das daraus resultierende repräsentative Element ist beispielhaft in Abbildung 7.9b zu sehen.

Die Regularisierungsprozedur wird auf die Schädigungsänderung  $\Delta\beta$  in den GAUSS-Punkten als auch in den lokalen Elementknoten angewandt. Die durch das Integrieren der Materialgleichungen in den Knoten ermittelten Werte von  $\Delta\beta$  werden durch die Regularisierung nicht berücksichtigt und überschrieben.

Durch die nichtlokale Regularisierung der Schädigungsvariablen  $\beta$  entsteht eine geringe Störung im Gleichgewichtszustand. Da der Vorgang der Regularisierung in jedem Lastschritt wiederholt durchgeführt wird, kann unter der Voraussetzung kleiner Lastschritte auf eine anschließende Gleichgewichtsiteration verzichtet werden [7]. Ein Vergleich der Regularisierungsprozeduren mit und ohne direkt nachfolgender Wiederherstellung des Gleichgewichtszustandes hat gezeigt, dass das Verfahren grundsätzlich stabil läuft.

### 7.3.2. Fehlerschätzer

Die Berechnung der Fehlerindikatoren kann je nach Simulationsvorgabe in Form der elementbasierten Fehlerindkatoren (5.19) und (5.23) oder des kantenorientierten Fehlerindikators (5.30) erfolgen.

Findet eine Anwendung der elementbasierten Fehlerindikatoren statt, so werden mit den Kriterien (5.26) bzw. (5.27) Elemente zur Verfeinerung markiert. Eine Kennzeichnung zur Vergrößerung der Elemente geschieht mit Hilfe der Bedingungen (5.28) und (5.29). Dabei wird für ein Element die mögliche Vergrößerung durch eine Verfeinerungsmarkierung verhindert. Mit dem Einsatz des kantenorientierten Fehlerindikators werden mit dem Kriterium (5.31) einzelne Elementkanten zur Teilung markiert. Eine Vergrößerung ist in diesem Fall nicht vorgesehen.

Mit der Definition der relativen Fehlervergleichswerte in Gl. (5.24), (5.25) und (5.32) findet man in jedem Berechnungsschritt Elemente bzw. Kanten zur Verfeinerung. Für diesen Fall werden mit

$$\bar{\eta}_E^2 \leq \alpha_E^{\text{th}} \cdot \bar{\eta}_{E1}^2 \quad (7.26)$$

$$\bar{\eta}_Y^2 \leq \alpha_Y^{\text{th}} \cdot \bar{\eta}_{Y\max}^2 \quad (7.27)$$

$$\bar{\eta}_K^2 \leq \alpha_K^{\text{th}} \cdot \bar{\eta}_{K1}^2 \quad (7.28)$$

globale Kriterien eingeführt, die zum Abbruch der adaptiven Netzanpassung in jedem konvergiertem Lastschritt führen. Hierbei sind  $\bar{\eta}_{E1}$  und  $\bar{\eta}_{K1}$  die jeweiligen Fehlervergleichswerte bezüglich des Startnetzes nach der ersten FE-Analyse. Mit  $\bar{\eta}_{Y\max}$  bezeichnet man



den maximalen Fehlervergleichswert des Fehlerindikators bezüglich der Fliessbedingung, der in jedem Berechnungsschritt neu überprüft und bei Bedarf aktualisiert wird. Mit den Parametern  $\alpha_K^{\text{th}}$ ,  $\alpha_E^{\text{th}}$  und  $\alpha_Y^{\text{th}}$  ist eine Steuerung der Abbruchbedingung möglich.

### 7.3.3. Vernetzungskontrolle

Für die Simulation von duktilem Risswachstum müssen aus numerischen und physikalischen Gründen die Schädigungszonen im Berechnungsmodell sehr fein vernetzt sein. Um eine sinnvolle Anwendung der nichtlokalen Regularisierung im Rahmen der FEM zu ermöglichen, sollte in den Bereichen mit Schädigung die Kantenlänge eines finiten Elements um ein Vielfaches kleiner als die charakteristische Länge  $l_c$  des repräsentativen Elements  $\Omega_r$  sein. Damit wird eine adäquate numerische Erfassung des repräsentativen Elements der Regularisierung ermöglicht. Darüber hinaus soll die Vernetzung fein genug sein, um beim inkrementellen Risswachstum die Vorgänge in dem geschädigten Gebiet vor der Rissspitze angemessen abzubilden.

Aus diesem Grund wurde eine Prozedur implementiert, welche eine Einflussnahme auf die Elementgröße in den betreffenden Bereichen durch eine gezielte Modifikation der Verfeinerungs- bzw. Vergrößerungsmarkierungen in den Elementen gestattet und im Anschluss an die Auswertung des Fehlerschätzers ausgeführt wird. Um in jedem Fall eine feine Vernetzung an der Rissspitze zu garantieren, werden jeweils die aktuellen Rissspitzelemente a priori zur Verfeinerung markiert. Für die Steuerung der Vernetzung in den Zonen mit Schädigungsentwicklung wurde folgende einfache Verfahrensweise gewählt:

Erreicht bzw. überschreitet das Hohlraumvolumen  $f$  in einem GAUSS-Punkt eines Elementes einen kritischen Wert  $f_c^{\text{net}}$  mit

$$f \geq f_c^{\text{net}} > f_0, \quad (7.29)$$

so wird das Element zur Verfeinerung markiert. Eine schon vorhandene Markierung zur Vergrößerung wird dabei gelöscht. Dadurch werden die Bereiche, in denen das Kriterium (7.29) erfüllt ist, innerhalb der adaptiven Netzanpassungsschleife systematisch verfeinert. Die dabei minimal erreichbare Elementgröße wird dann über die Elementkantenlänge  $l_K$  bestimmt. Unterschreitet die Länge einer Elementkante eine kritische Größe mit

$$l_K < l_K^{\text{min}}, \quad (7.30)$$

so wird für das betreffende Element eine weitere Markierung zur Verfeinerung verhindert bzw. gelöscht. Da die Schädigung als ein irreversibler Prozess definiert ist, wird in dem Bereich auch eine Vergrößerung nicht mehr zugelassen.

Durch diese Verfahrensweise erreicht man für die Schädigungszonen eine entsprechende homogene Vernetzung, deren räumliche Ausdehnung und Feinheit durch die Parameter

$f_c^{\text{net}}$  und  $l_K^{\text{min}}$  gesteuert werden kann. Allerdings wird durch diese einfache Methode der Einfluss des Fehlerschätzers auf die adaptive Netzanpassung in Gebieten mit Schädigungsentwicklung erheblich gemindert. Durch die Fehlerschätzer werden dann, in Abhängigkeit vom Parameter  $f_c^{\text{net}}$ , vorrangig Bereiche mit geringer und gar keiner Schädigungsentwicklung optimiert.

### 7.3.4. Berechnung und Auswertung des akustischen Tensors

Ausgehend vom Risswachstums-kriterium in Abschnitt 6.4 wird der akustische Tensor mit Hilfe von Gl. (4.20) an der aktuellen Rissspitze berechnet. Zur Bestimmung der dafür benötigten materiellen Tangente  $\mathbf{D}^m$  und des Spannungstensors  $\mathbf{T}$  sind die Materialgleichungen (4.8)-(4.11) am Ende eines jeden konvergierten Lastschritts für den globalen Rissspitzenknoten zu lösen. Zu diesem Zweck wird der Deformationstensor  $\mathbf{C}$  an der Rissspitze mit Hilfe von Gl. (2.13) und dem am Rissspitzenknoten gemittelten Deformationsgradienten

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{360^\circ} \sum_{i=1}^{n_s} \gamma_i^S \mathbf{F}_i^S \quad (7.31)$$

zu jedem Lastschritts berechnet. Hierbei wird die Anzahl der Rissspitzenelemente mit  $n_s$  bezeichnet und  $\mathbf{F}_i^S$  ist der Deformationsgradient am Rissspitzenknoten in Bezug auf das Rissspitzenelement  $i$ . Über die Größe des Elementwinkels  $\gamma_i^S$  (siehe Abbildung 7.10) erfolgt eine entsprechend einfache Wichtung des Deformationsgradienten.

Zum Simulationsbeginn sowie nach einer inkrementellen Risserweiterung müssen die entsprechenden Zustandsgrößen am aktuellen Rissspitzenknoten jeweils neu initialisiert werden. Das geschieht in diesem Fall durch eine einfache Mittelung von den umliegenden Rissspitzenelementen. Am globalen Rissspitzenknoten wird die Entwicklung der Schädigungsvariable  $\beta$  allein durch das nichtlokale Regularisierungsverfahren bestimmt. Zusammen mit dem über die Materialgleichungen berechneten Wert der plastischen Vergleichsdehnung  $\varepsilon_v^p$  werden diese Variablen im Anschluss der Berechnung des akustischen Tensors für den nächsten Lastschritt zwischengespeichert.

Für die praktische Anwendung einer numerischen Näherungslösung ist das Lokalisierungskriterium in Gl. (4.21) zu streng formuliert und kann in der Regel nicht exakt erfüllt werden. Mit

$$\det(\mathbf{Q}) \leq 0. \quad (7.32)$$

wird deshalb ein entsprechendes numerisches Kriterium gewählt. Für die Auswertung des Kriteriums wird mit Hilfe des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens das lokale Minimum der Determinante des akustischen Tensors  $\det(\mathbf{Q})|_{\min}$  in Abhängigkeit von der Richtung des

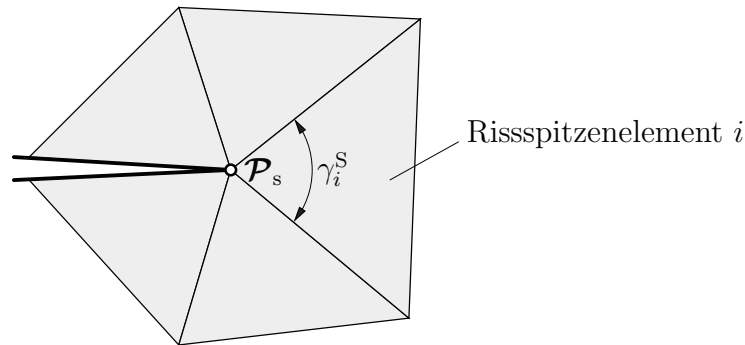


Abbildung 7.10.: Elemente an der Risspitze

Normalenvektors bestimmt sowie, falls das Kriterium (7.32) erfüllt ist, die dazugehörigen Lokalisierungsrichtungen [8, 125].

### 7.3.5. Algorithmus zur adaptiven Risserweiterung im FE-Netz

Das Richtungskriterium für duktilen Risswachstum (6.25) basiert auf dem akustischen Tensor in der Ausgangskonfiguration und wird bezüglich der unverformten Struktur angegeben. Die inkrementelle Risserweiterung in der Vernetzung kann in diesem Fall in der gleichen Art und Weise wie im Abschnitt 7.2.2 für linear-elastisches Materialverhalten erfolgen. Allerdings muss nach jeder Elementteilung zusätzlich eine Übertragung der Zustandsgrößen vom Vater- auf die neuen Sohn-Elemente erfolgen.

Müssen im Rahmen der Risserweiterung Elementknoten verschoben werden, so ist für die dadurch betroffenen Elemente ebenfalls eine Transformation der Zustandsgrößen notwendig. Eine dafür beispielhafte Elementkonfiguration ist in Abbildung 7.11 zu sehen. Am einfachsten lassen sich hier die Knotenverschiebungen für die neuen Knotenpositionen mit Hilfe der Beziehung (5.7) bestimmen. Ausgehend vom ebenen Verzerrungszustand wird mittels Gl. (5.34) der Deformationsgradient und anschließend der rechte CAUCHY-GREENSche Verzerrungstensor in allen Knoten der betroffenen Elemente neu berechnet. Für die Bestimmung der restlichen Feldgrößen hat sich folgende Technik bewährt:

- Die Feldgrößen werden an ihrer neuen Knotenposition über die Knotenwerte des entsprechenden Elementes der alten Vernetzung interpoliert (vgl. Gl. (5.33)).
- Befindet sich die neue Knotenposition auf einer Elementkante der alten Vernetzung, dann werden die Feldgröße jeweils in den angrenzenden Elementen der alten Vernetzung berechnet und danach einfach gemittelt.

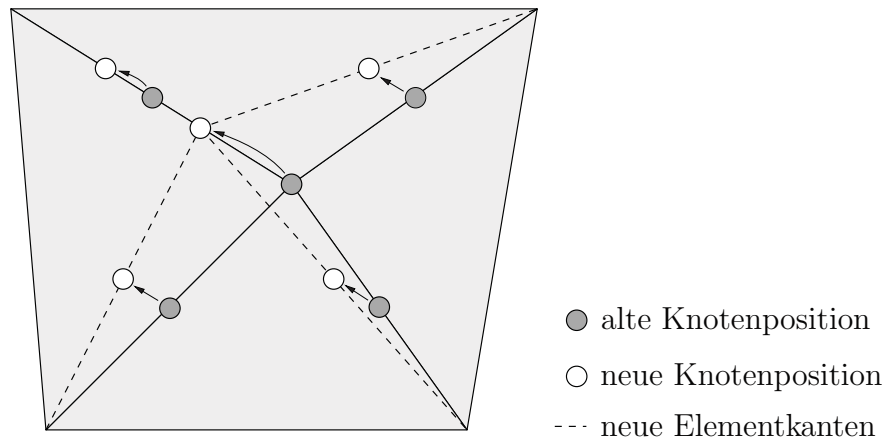


Abbildung 7.11.: Verschieben von Elementknoten

Die Berechnung der GAUSS-Punktwerte der neuen Elementkonfiguration erfolgt, ausgehend von den Werten der Elementknoten, ebenfalls über die Interpolationsvorschrift (5.33). In jedem Fall muss im Anschluss der Knotenverschiebung eine Gleichgewichtsite-ration erfolgen, da aufgrund der Nähe zur Rissspitze der Gleichgewichtszustand extrem gestört sein kann.

Der neue inkrementelle Rissabschnitt wird an der Rissspitze durch das Auftrennen der FE-Vernetzung entlang von Elementkanten erzeugt. Die dabei freigeschnittenen inneren Knotenkräfte werden zu äußeren Knotenkräften, welche als Bindungskräfte die Rissufer entlang des neuen Rissabschnittes noch zusammenhalten. Ein abruptes Entfernen dieser Bindungskräfte würde zu einer plötzlichen Entlastung im Bereich der Rissspitze führen. Aus Gründen der numerischen Stabilität müssen diese äußeren Knotenkräfte schrittweise herabgesetzt werden, so dass der Riss an der neuen Rissspitze langsam geöffnet wird und sich ein neuer Gleichgewichtszustand einstellen kann. Diese Vorgehensweise entspricht prinzipiell der „nodal release“-Technik [65].

## 8. Anwendungsbeispiele

### 8.1. Modellierung des Risswachstums bei elastischem Materialverhalten

#### 8.1.1. Rissausbreitung unter Modus-I-Beanspruchung

Das erste Beispiel zeigt die Risswachstums-Simulation eines Modus-I-Risses in einer symmetrisch belasteten Probe. Mit Hilfe dieses Testbeispiels soll die Fähigkeit des adaptiven Berechnungsalgorithmus demonstriert werden. Die Probengeometrie, Randbedingungen und FE-Vernetzung zu Beginn der Simulation sind in Abbildung 8.1 zu sehen. Auf der linken Seite der rechteckigen Probe befindet sich ein scharfer Riss, welcher durch die Verschiebungsrandbedingungen (konstante Verschiebungen entlang der oberen bzw. unteren Seitenhälfte) geöffnet wird. In Tabelle 8.1 sind neben den gewählten Materialparametern und der vorgegebenen Gesamtverschiebung auch die entsprechenden Parameter zur Steuerung der FE-Simulation, der adaptiven Netzanpassung sowie der bruchmechanischen Berechnung aufgeführt.

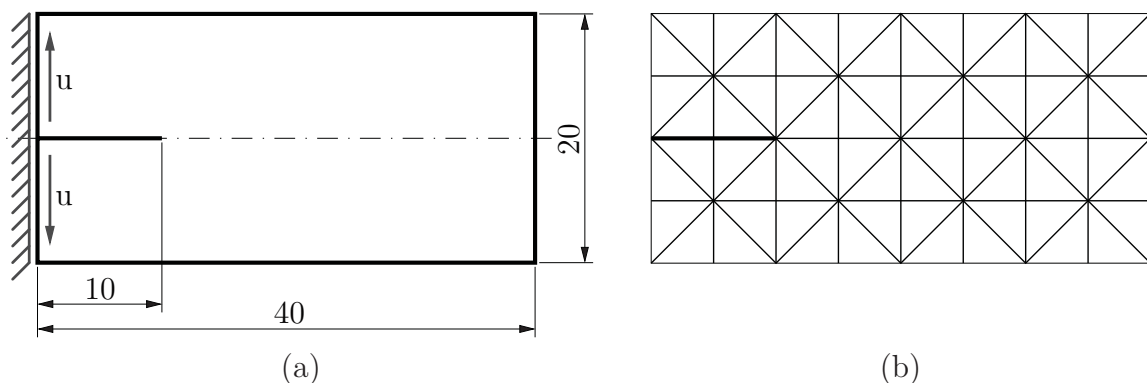


Abbildung 8.1.: Abmessungen, Randbedingungen und FE-Vernetzung des Berechnungsmodells (Angaben in Millimetern, Modelldicke = 1 mm)

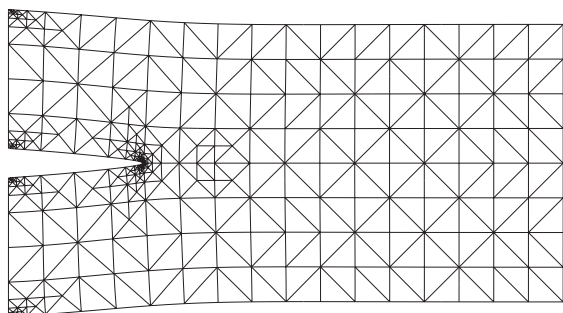
Parameter	Wert
Elastizitätsmodul	$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
Querkontraktionszahl	$\nu = 0,3$
Bruchzähigkeit	$K_{Ic} = 2000 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$
vorgegebene Gesamtverschiebung	$u = 0,2 \text{ mm}$
max. inkrementelle Risswachstumslänge	$\Delta a_i^{\max} = 0,5 \text{ mm}$
Anzahl der Lastschritte	$N_{Ls} = 200$
Abbruchschranke des CG-Solvers	$\epsilon_{slv} = 10^{-3}$
Verfeinerungsparameter	$\alpha_E^f = 0,8$
Vergrößerungsparameter	$\alpha_E^g = 10^{-3}$
min. Anzahl von Element-Teilungen	$N_T = 0\%$
Anzahl der Berechnungskonturen	$n_\Gamma = 3$
Radien der Kontur-Suchkreise	$r_\Gamma = 0,05/0,07/0,09 \text{ mm}$
Genauigkeit der bruchmech. Berechnung	$\epsilon_J = 10^{-2}$

Tabelle 8.1.: Berechnungsparameter

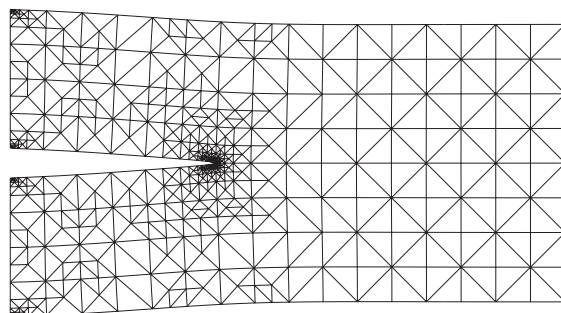
Als Ergebnis der Simulation ist in Abbildung 8.2 für verschiedene Phasen des Risswachstums das deformierte Finite-Elemente-Netz dargestellt. Zur besseren Erkennbarkeit sind hierbei die Verschiebungen im Modell überhöht wiedergegeben. Durch die aufgebrachte Verschiebungsbelastung ist der Riss von 10 mm auf 28,4 mm angewachsen. Erwartungsgemäß wird die FE-Vernetzung in der Umgebung der Rissspitze feiner gestaltet als in anderen Bereichen des Modells. Man erkennt außerdem, dass das Netz an den Stellen, die bereits von der Rissspitze durchlaufen wurden, nach weiterem Wachstum wieder vergrößert wird. Abbildung 8.2a zeigt das adaptiv verfeinerte FE-Netz zum Zeitpunkt des ersten Risswachstums im Modell, während dazu ausgewählte Phasen der inkrementellen Risserweiterung vergrößert in Abbildung 8.3 dargestellt sind. Die endgültige stationäre Position der Rissspitze für die vorgegebenen Materialparameter und Belastung ist in Abbildung 8.2d zu sehen.

Der Zusammenhang zwischen aufgebrachter Verschiebung und dem Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  ist in Abbildung 8.4 dargestellt. In der Vergrößerung der  $u$ - $K_I$ -Kurve sieht man, dass die Verschiebung stetig erhöht wird, bis der Wert von  $K_I$  den Wert der vorgegeben Bruchzähigkeit  $K_{Ic}$  übersteigt. Durch das einsetzende inkrementelle Risswachstum wird die Probe entlastet und der  $K_I$ -Wert sinkt. Dieser Vorgang wiederholt sich solange, bis die Verschiebung ihren Zielwert erreicht hat.

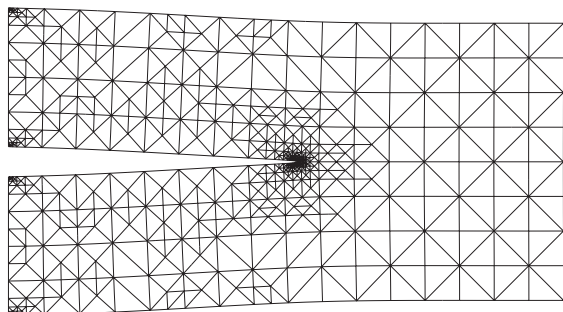
Als nächstes soll ausgehend von den Berechnungsparametern in Tabelle 8.1 der Einfluss einzelner Parameter auf die Risswachstumssimulation untersucht werden. Die Qualität



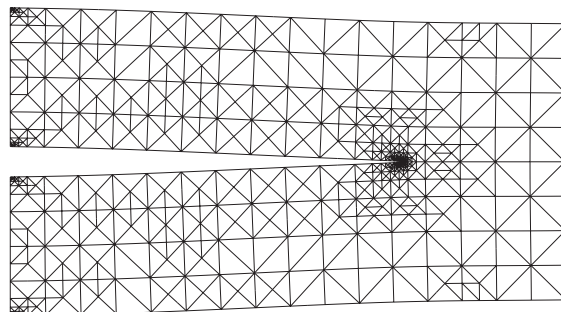
(a) Schritt 074 (1397 Knoten)



(b) Schritt 201 (2351 Knoten)

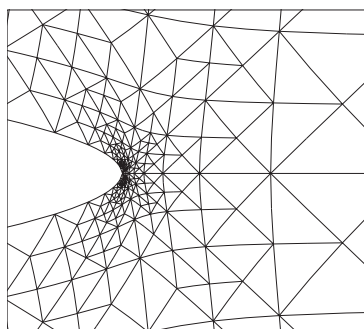


(c) Schritt 367 (2407 Knoten)

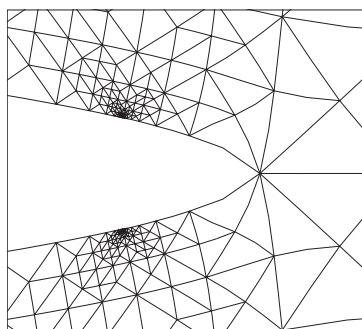


(d) Schritt 568 (2453 Knoten)

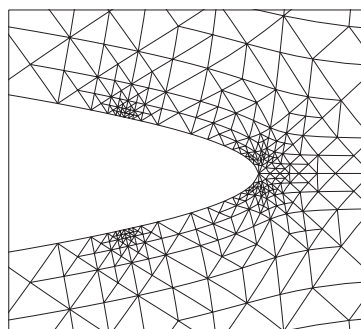
Abbildung 8.2.: Phasen der Rissausbreitung bei symmetrischer Belastung



(a) Schritt 74



(b) Schritt 75



(c) Schritt 83

Abbildung 8.3.: Phasen der inkrementellen Rissausbreitung

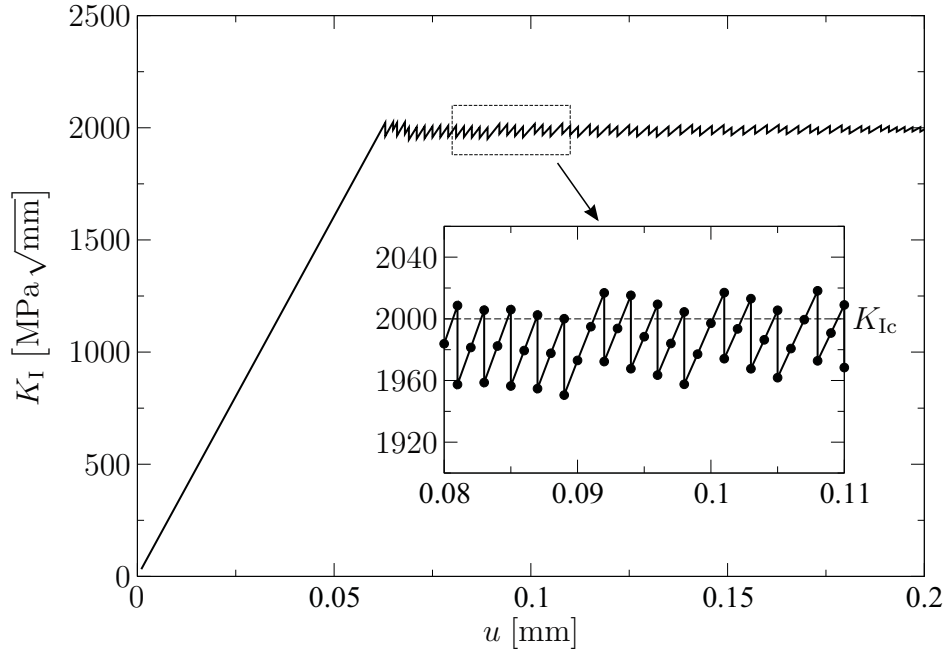


Abbildung 8.4.: Entwicklung von  $K_I$  während der Simulation

der Simulation soll dabei unter anderem bezüglich der bruchmechanischen Ergebnisse diskutiert werden. Dazu wird analog zu Gl. (3.2) der Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  in Abhängigkeit zur aufgetragenen Verschiebung  $u$  als

$$K_I = u\sqrt{\pi a} \tilde{Y}_I \quad (8.1)$$

definiert. Hierbei ist  $\tilde{Y}_I$  eine Funktion, welche den Einfluss von Probengeometrie, Risspfad und Belastungsart berücksichtigt. Durch Umstellen erhält man mit

$$\tilde{Y}_I = \frac{K_I}{u\sqrt{\pi a}} \quad (8.2)$$

die Funktion  $\tilde{Y}_I$  in Abhängigkeit von aufgetragener Verschiebung  $u$ , aktueller Risslänge  $a$  und dem dadurch wirkenden Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$ . Diese Funktion ist für jedes Bauteil mit einer bestimmten Geometrie, Risskonfiguration und Art der Verschiebungsrandbedingung charakteristisch, d.h. eindeutig. Damit erhält man eine einfache Möglichkeit, für verschiedene Parametersätze die Qualität der Risswachstumssimulation, unter der Voraussetzung der Kenntnis des wahren Verlaufs dieser Funktion  $\tilde{Y}_I$ , zu bestimmen bzw. miteinander zu vergleichen. Für die Ergebnisauswertung mittels der  $\tilde{Y}_I$ -Funktion werden dabei nur die Simulationsschritte berücksichtigt, in denen das Qualitätskriterium der Vernetzung erfüllt ist, d.h. die berechneten bruchmechanischen Parameter erreichen die geforderte Genauigkeit.



Parametersatz	$\alpha_E^f$	$\alpha_E^g$
0,7/10 <sup>-4</sup>	0,7	10 <sup>-4</sup>
0,8/10 <sup>-3</sup>	0,8	10 <sup>-3</sup>
0,9/10 <sup>-2</sup>	0,9	10 <sup>-2</sup>

Tabelle 8.2.: Parameter zur adaptiven Netzanpassung

Parametersatz	Gesamtzeit der Lösung [sec]	Summe der CG-Iterationen
0,7/10 <sup>-4</sup>	538,2	94784
0,8/10 <sup>-3</sup>	266,3	67125
0,9/10 <sup>-2</sup>	195,2	70759

Tabelle 8.3.: Lösungsdauer und Anzahl der CG-Iterationen für verschiedene Parametersätze der Netzanpassung

### Adaptive Vernetzungsparameter $\alpha_E^f$ und $\alpha_E^g$

Im Folgenden wird der Einfluss der Parameter zur adaptiven Verfeinerung  $\alpha_E^f$  und Vergrößerung  $\alpha_E^g$  auf die Simulation gezeigt. Die verwendeten Parametersätze sind in Tabelle 8.2 zu sehen. Abbildung 8.5 zeigt  $\tilde{Y}_I$  als Funktion der Risslänge  $a$  mit einer guten Übereinstimmung für die 3 verwendeten Parametersätze. Eine Darstellung des Verlaufs der Simulationen anhand der Entwicklung der Freiheitsgrade im Berechnungsmodell zeigt Abbildung 8.6. Sehr gut ist der Einfluss der verschiedenen Parameter auf die Anzahl der Freiheitsgrade und Simulationsschritte zu erkennen. Eine rapide Verfeinerung (kleine  $\alpha_E^f$ -Werte) und verzögerte Vergrößerung (kleine  $\alpha_E^g$ -Werte) der FE-Vernetzung beschleunigen demnach die Berechnung hinsichtlich der Anzahl der Simulationsschritte, d.h. die zur genauen Berechnung der bruchmechanischen Kennwerte notwendige Netzfeinheit an der Risspitze wird schneller erreicht. Dafür steigt aufgrund der höheren Freiheitsgrade des Modells der Aufwand beim Lösen des FE-Gleichungssystems. Hierzu sind in Tabelle 8.3 die zugehörigen Zeiten zur Lösung<sup>1</sup> sowie die Anzahl der Iterationsschritte des CG-Solvers aufgeführt. Einen Vergleich der adaptiven FE-Vernetzung am Simulationsende ist für die Parametersätze 0,7/10<sup>-4</sup> und 0,9/10<sup>-2</sup> in Abbildung 8.7 zu sehen.

Das schnelle Ansteigen der Freiheitsgrade für den Parametersatz 0,7/10<sup>-4</sup> ist zum Einen auf die stark verzögerte Vergrößerung der Vernetzung zurückzuführen, d.h. in der Summe entstehen durch die Netzverfeinerung mehr neue Elemente als dass durch eine Vergrößerung Elemente abgebaut werden. Zum Anderen lässt sich hier sehr schön die Empfindlichkeit der Fehlerindikatoren demonstrieren. Aufgrund von numerischen Ungenauigkei-

<sup>1</sup>Assemblieren der Matrizen und Lösen des Gleichungssystems

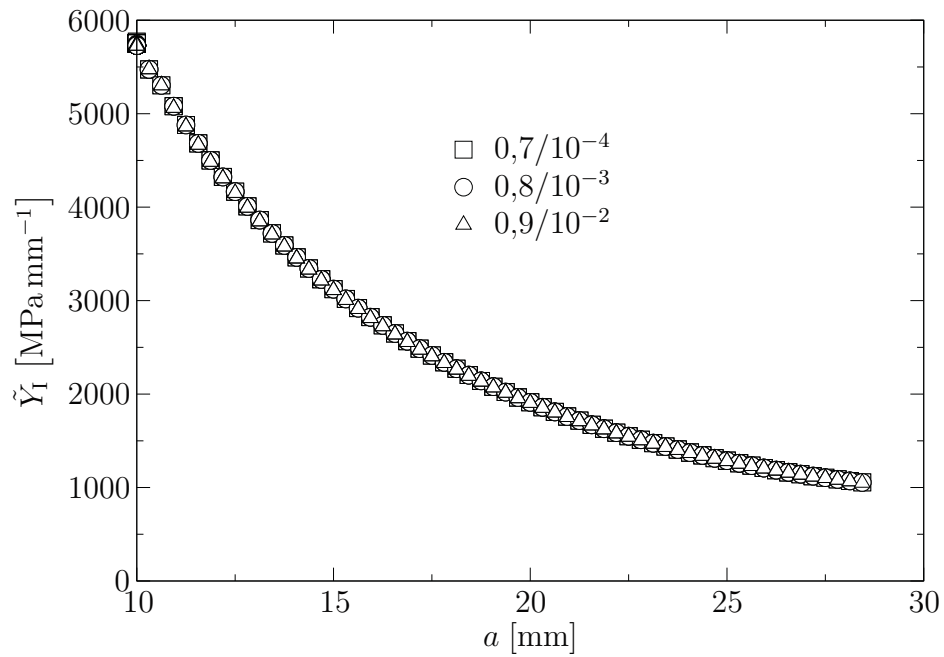


Abbildung 8.5.: Verlauf der  $\tilde{Y}_I$ -Funktion in Abhängigkeit von der Risslänge  $a$  für verschiedene adaptive Parametersätze

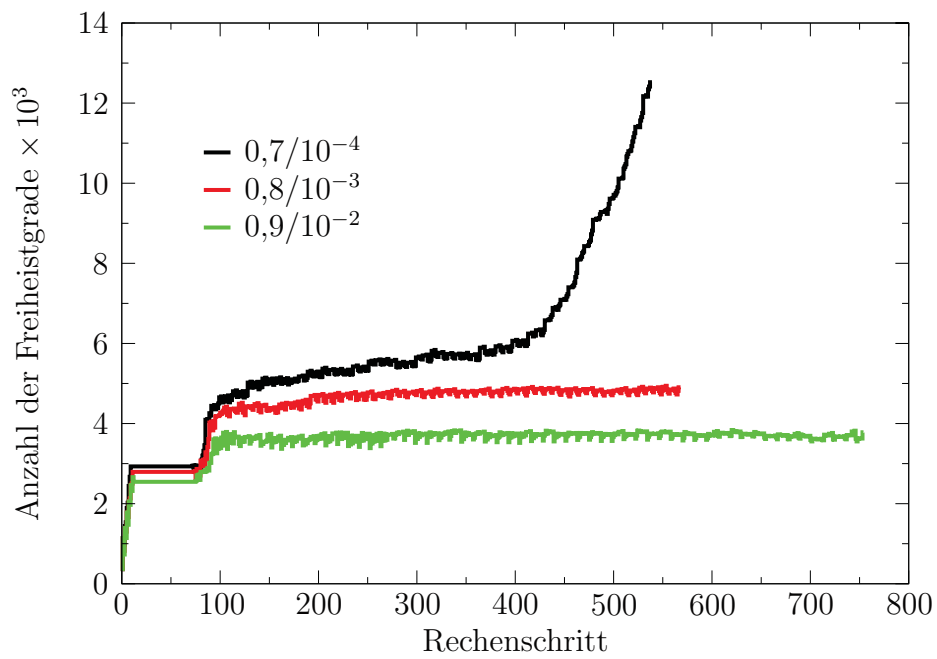


Abbildung 8.6.: Einfluss der adaptiven Vernetzungsparameter  $\alpha_E^f$  und  $\alpha_E^g$  auf den Verlauf der Simulation

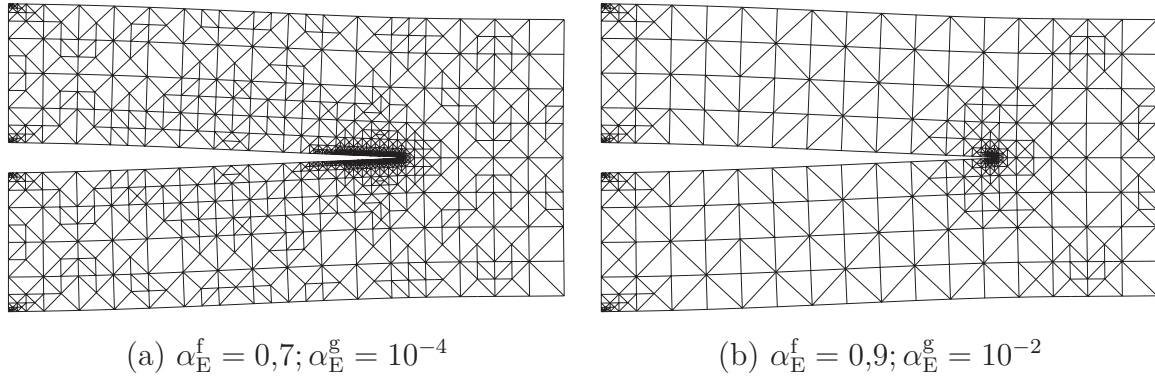


Abbildung 8.7.: Adaptive Vernetzung am Simulationsende in Abhängigkeit von den adaptiven Vernetzungsparametern  $\alpha_E^f$  und  $\alpha_E^g$

ten bei der Berechnung der bruchmechanischen Parameter hat der Riss keinen exakten geradlinigen Verlauf. Diese Ungenauigkeit wird vom Fehlerindikator registriert und führt zu einer verzögerten Netzvergrößerung entlang der Rissufer. Im Ergebnis ist auch in größerer Entfernung von der Risspitze die Vernetzung am Rissufer noch sehr fein. Die Wirkung tritt erst zum Ende der Simulation verstärkt auf und hängt mit der wachsenden Risslänge und der dadurch veränderten Belastung im Gebiet um die Risspitze zusammen. Erzwingt man für diesen Fall in der Simulation einen geraden Rissverlauf entlang der Symmetrielinie des Berechnungsmodells, so verschwindet dieser Effekt, wie in Abbildung 8.8 zu sehen ist.

### Minimale Elementteilungen

Um während der Simulation eine Beschleunigung der adaptiven Vernetzung zu erreichen, wurde in [86] eine minimale Anzahl von Element vorgeschlagen, welche pro Simulationsschritt zwingend zu verfeinern sind. Abbildung 8.9 zeigt an Hand der Entwicklung der Freiheitsgrade während der Simulation den Vergleich für die Verfeinerung von minimal 0% und 5% der im aktuellen Rechenschritt vorhandenen Elemente. Die Variante mit 5% führt hier zu einer deutlichen Verringerung der Rechenschritte, welche aber mit einer höheren Anzahl von Freiheitsgraden erkauft wird.

### Anzahl und Größe der Konturen zur Interaction-Integral-Berechnung

Als Nächstes soll der Einfluss von Anzahl und Größe der Konturen zur Berechnung des Interaction-Integrals  $I^{12}$  auf die Simulation des Risswachstums gezeigt werden. Die hier verwendeten Konturparameter für die Anzahl der Konturen sowie der Suchradien sind in

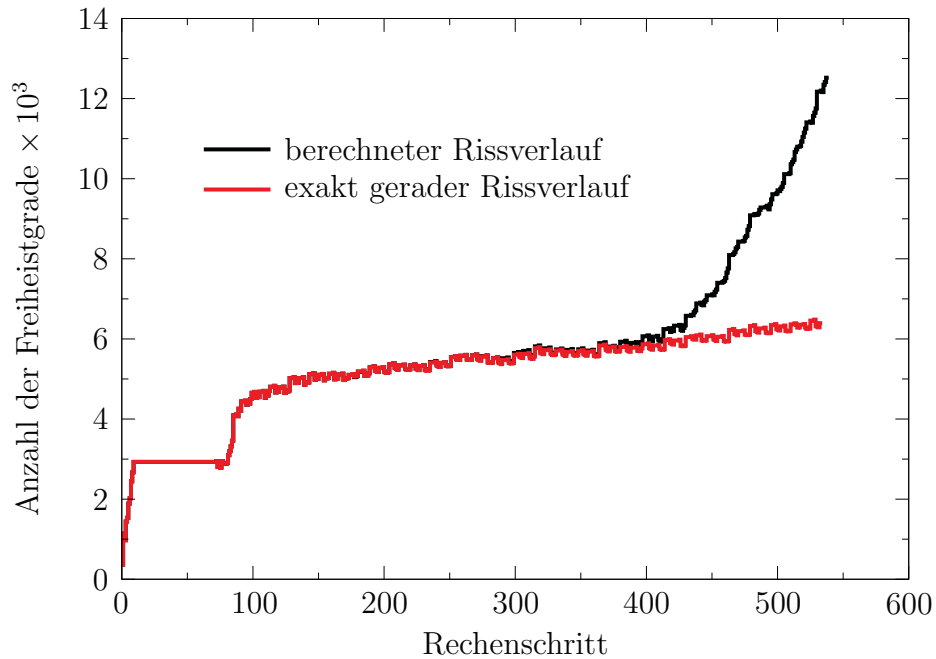


Abbildung 8.8.: Entwicklung der Freiheitsgrade für Simulationen mit berechnetem und geradem Rissverlauf ( $\alpha_E^f = 0,7$ ;  $\alpha_E^g = 10^{-4}$ )

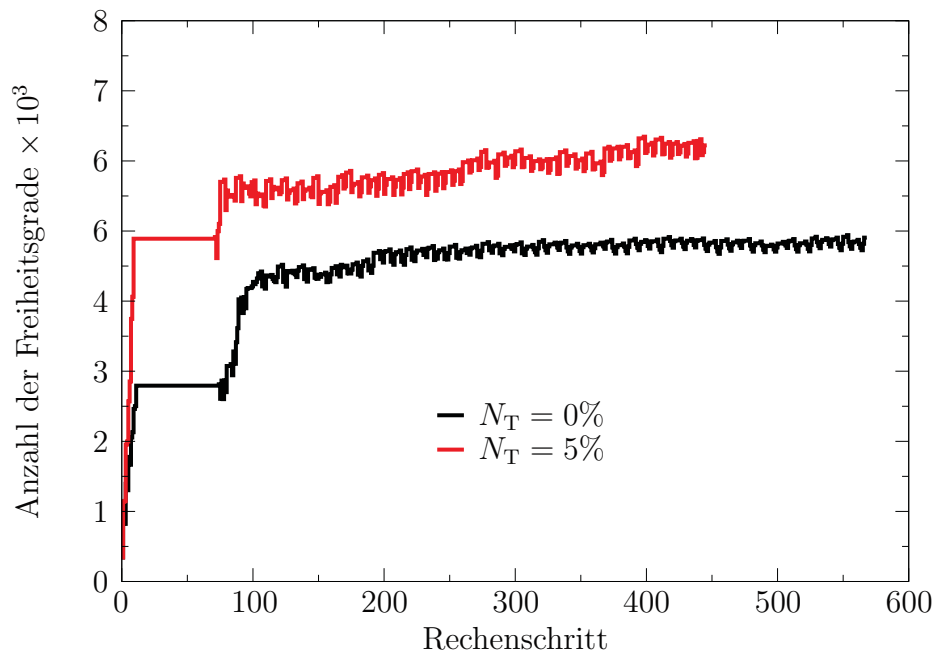


Abbildung 8.9.: Einfluss der minimalen Anzahl von Element-Verfeinerungen pro Rechenschritt auf den Verlauf der Simulation

Parametersatz	$n_\Gamma$	$r_\Gamma$ [mm]
2/0,05	2	0,05; 0,07
3/0,05	3	0,05; 0,07; 0,09
4/0,05	4	0,05; 0,07; 0,09; 0,11
3/0,20	3	0,20; 0,25; 0,30

Tabelle 8.4.: Parameter für Anzahl und Größe der Berechnungskonturen

Tabelle 8.4 zu sehen. Vergleicht man die Qualität der Risswachstumssimulationen mittels der  $\tilde{Y}_I$ -Funktion in Abbildung 8.10, so stellt man eine sehr gute Übereinstimmung für die unterschiedlichen Konturparameter fest. Unterschiede sind aber auch hier in Abbildung 8.11 bezüglich der Anzahl der Freiheitsgrade während der Simulation zu erkennen. Die Verläufe für den Parametersatz 2/0,05 und 3/0,05 sind fast identisch, während für die Parametersätze 4/0,05 und 3/0,20 doch deutliche Abweichungen zu sehen sind.

Für den Parametersatz 4/0,05 muss für die zusätzliche Kontur das Netz um die Rissspitze noch stärker verfeinert werden, damit das Qualitätskriterium der Vernetzung erfüllt ist. Dafür sind weitere Verfeinerungsschritte notwendig, aufgrund dessen der Fehler in den Elementen um die Rissspitze kleiner wird. Infolge des relativen Vergleichswertes  $\bar{\eta}_E$  wird deshalb auch in anderen Bereichen des Berechnungsmodells eine weitere Netzverfeinerung veranlasst. Das führt zu einer schnellen Zunahme von Elementen und Knoten im Modell und damit auch der Freiheitsgrade. Nachdem der Riss verlängert wurde, ist auch der Elementfehler an der neuen Rissspitze wieder sehr groß und es wird dort wieder entsprechend verfeinert, während in allen anderen Bereichen des Modells die Vernetzung erst einmal rasch vergrößert. Dabei verschwinden durch die Vergrößerung mehr Elemente, als durch Elementteilungen entstehen und die Anzahl der Freiheitsgrade sinkt schlagartig. Dieser gesamte Vorgang wiederholt sich mit jeder neuen Rissspitze und verliert erst ab einer bestimmten Risslänge an Bedeutung.

Dagegen befinden sich die festgelegten Suchradien für den Parametersatz 3/0,20 in derselben Größenordnung wie die maximale inkrementelle Risswachstumslänge  $\Delta a_i^{\max}$ . Damit verlaufen die Berechnungskonturen in einem größeren Abstand zur Rissspitze als bei allen andern Kontur-Parametersätzen und es sind kleinere Elementfehler im Bereich der Konturelemente zu erwarten. Für den Fall von Risswachstum wird die Vernetzung im Gebiet der nächsten Rissspitze aufgrund der Konturgröße schon entscheidend vorgeprägt. Des Weiteren verlaufen die Berechnungskonturen an der neuen Rissspitze ebenfalls durch die feinere Vernetzung der alten Rissspitze, welche erst im weiteren Simulationsverlauf vergrößert wird. Dadurch erhält man sehr schnell genaue Ergebnisse für das Konturintegral und der Aufwand für die Verfeinerung bzw. Vergrößerung des Netzes bleibt konstant. Nur am Anfang der Simulation muss entsprechend in die Vernetzung investiert werden, was sich wiederum in den höheren Freiheitsgraden in Abbildung 8.11 ausdrückt.

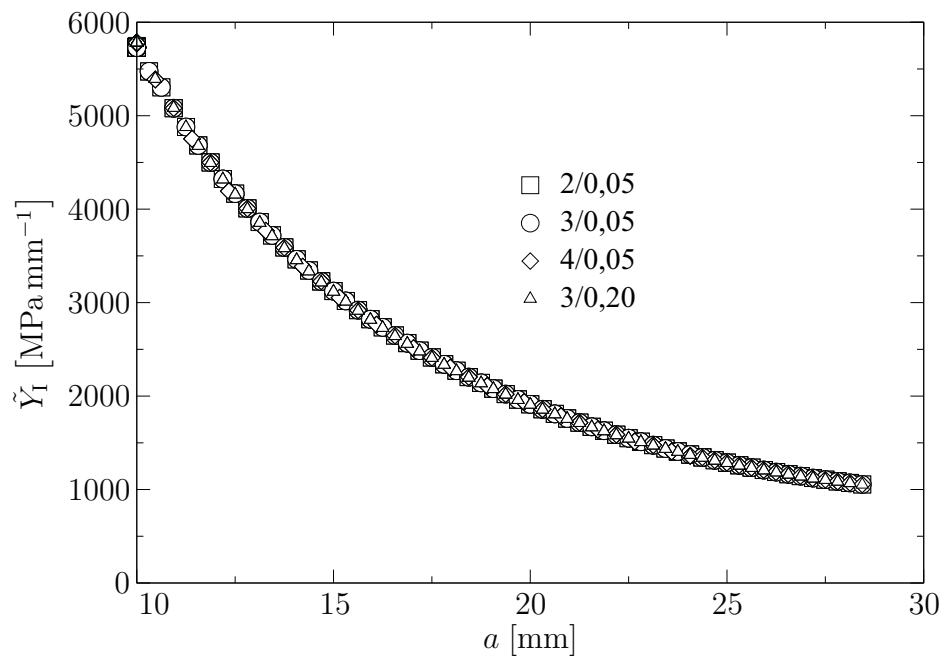


Abbildung 8.10.: Verlauf der  $\tilde{Y}_I$ -Funktion über der Risslänge in Abhängigkeit von den Konturparametern

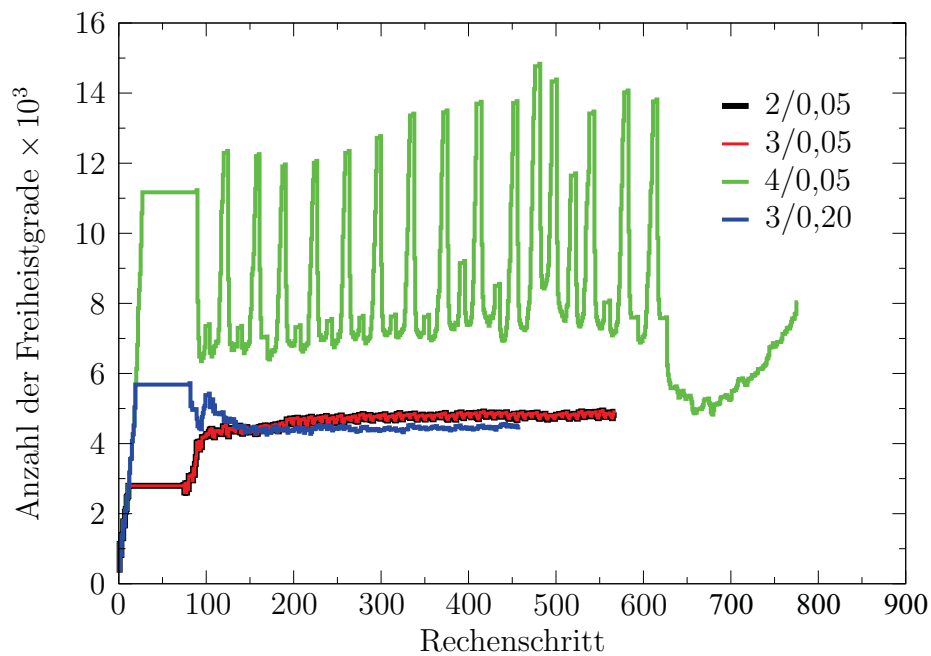


Abbildung 8.11.: Verlauf der Simulation in Abhängigkeit von den Konturparametern

### Abbruchschranke des CG-Solvers

Zum Schluss soll noch der Einfluss der Abbruchschranke  $\epsilon_{\text{siv}}$  des iterativen CG-Solvers auf die Simulationsergebnisse betrachtet werden. In den Abbildungen 8.12 und 8.13 sind die Ergebnisse für verschiedene Genauigkeiten zu sehen. Vom Verlauf her sind die Simulationsergebnisse für  $\epsilon_{\text{siv}} = 10^{-4}$  und  $\epsilon_{\text{siv}} = 10^{-3}$  kaum zu unterscheiden, währenddessen für  $\epsilon_{\text{siv}} = 10^{-2}$  leichte Abweichungen zu beobachten sind.

Erwartungsgemäß muss während der Risswachstumssimulation für die Variante mit  $\epsilon_{\text{siv}} = 10^{-1}$  sehr stark verfeinert werden, damit die geforderte Genauigkeit für die bruchmechanischen Größen erreicht wird. Trotzdem ist im Vergleich der  $\tilde{Y}_I$ -Funktionen in Abbildung 8.12 eine deutliche Abweichung zu erkennen. Im Vergleich zu den Berechnungen mit höheren Genauigkeiten müssen stellenweise größere Verschiebungsrandbedingungen aufgebracht werden, damit das Risswachstumskriterium erfüllt wird. Auch die Länge des Risses am Ende der Simulation ist mit 27,8 mm kürzer als bei allen vorhergehenden Simulationen ( $a \approx 28,4$  mm). Der adaptive Verfeinerungsalgorithmus ist hier offensichtlich nicht in der Lage, die schlechtere Lösung des FE-Gleichungssystems durch eine adäquate Vernetzung zu kompensieren.

Die Anzahl der Rechenschritte zur Simulation des Risswachstums befinden sich ungefähr auf dem gleichen Niveau. Die Gesamtzeiten zur Lösung der Gleichungssysteme sowie die Anzahl der notwendigen Iterationen des CG-Solvers sind für die verschiedenen Abbruchschranken in Tabelle 8.5 zu sehen. Ein Vergleich der Vernetzungen am Simulationsende in Abhängigkeit von  $\epsilon_{\text{siv}}$  zeigt Abbildung 8.14.

$\epsilon_{\text{siv}}$	Gesamtzeit der Lösung [sec]	Summe der CG-Iterationen
$10^{-4}$	369,6	92341
$10^{-3}$	266,3	67127
$10^{-2}$	172,2	42818
$10^{-1}$	133,48	24666

Tabelle 8.5.: Lösungsdauer und Anzahl der CG-Iterationen für verschiedene  $\epsilon_{\text{siv}}$

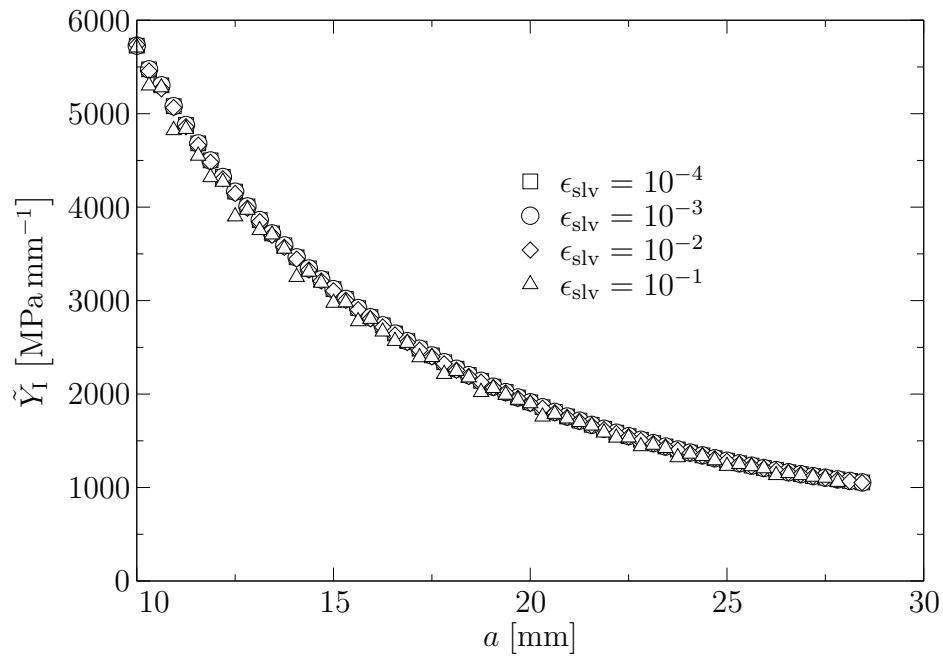


Abbildung 8.12.: Verlauf der  $\tilde{Y}_I$ -Funktion in Abhängigkeit von der Genauigkeit der FE-Lösung  $\epsilon_{slv}$

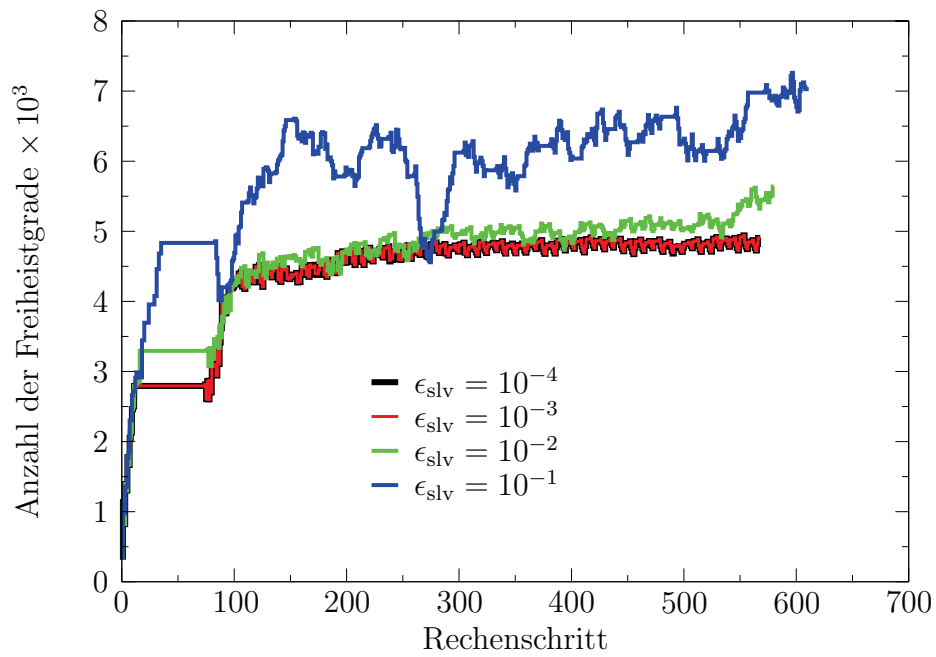


Abbildung 8.13.: Anzahl der Freiheitsgrade während der Simulation in Abhängigkeit von der Genauigkeit der FE-Lösung  $\epsilon_{slv}$



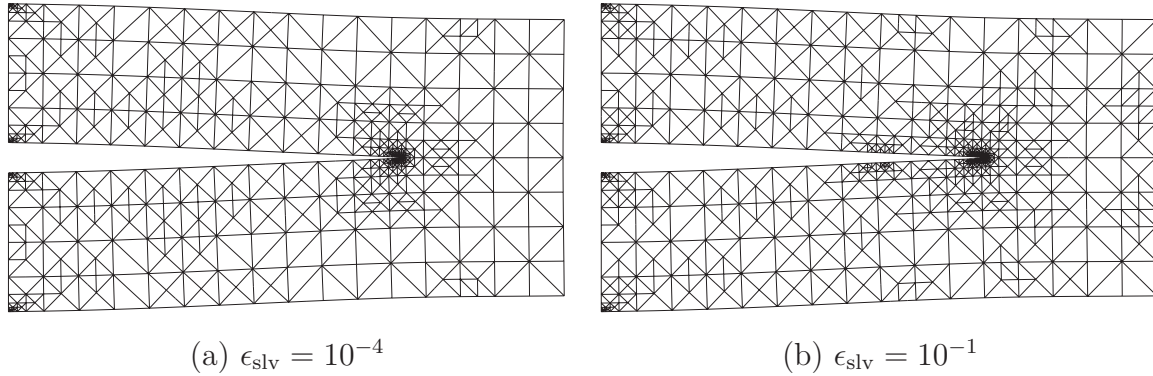


Abbildung 8.14.: Adaptive Vernetzung am Simulationsende in Abhängigkeit von der Genauigkeit der FE-Lösung  $\epsilon_{slv}$

### 8.1.2. Ermüdungsrisswachstum in Querkraftbiegeprobe

Das zweite Beispiel zeigt die Simulation von Ermüdungsrisswachstum in einer Querkraftbiegeprobe, für die entsprechende experimentelle Ergebnisse für den Verlauf des Risspfades vorliegen [136]. Die Abmessungen des Berechnungsmodells zeigt Abbildung 8.15. In Abbildung 8.16 sind die Startvernetzung sowie die Randbedingungen des Berechnungsmodells zu sehen. Die Material- und Berechnungsparameter sind in der Tabelle 8.6 aufgeführt. Als Beanspruchung wird eine Schwellbelastung  $\Delta q$  ( $R = 0$ ) angenommen und für den kritischen Schwellwert  $\Delta K_{th}$  ein sehr kleiner Wert vorgegeben, so dass es während der Simulation in jedem Fall zum Risswachstum kommt. Die Kerblage wird analog den Versuchen in [136] mit  $s_K = 18$  mm bzw.  $s_K = 30$  mm festgelegt.

In Abbildung 8.17 sind für die Biegeprobe mit der Kerblage  $s_K = 30$  mm einzelne Phasen des Risswachstums dargestellt. Zum Ende der Simulation (Abbildung 8.17d) erhält man aufgrund der wachsenden Deformationen im Restquerschnitt (Bereich zwischen Risspitze und unterem Probenrand) einen besonders großen Fehler. Da der Elementfehler an der Einspannung und den Bohrungen verhältnismäßig klein ist, kann dort das FE-Netz wieder in Richtung der Startvernetzung vergrößert werden. Im Gegensatz zum vorherigen Anwendungsbeispiel (Abschnitt 8.1.1) erfolgt entlang des generierten Risspfades so gut wie keine Vergrößerung der unmittelbaren Rissufervernetzung. Die für das inkrementelle Risswachstum notwendigen Elementkanten werden im vorliegenden Fall durch passende Elementteilungen erzeugt und diese geteilten Elemente darf man im Weiteren nicht mehr zusammenfügen. Das bedeutet, dass eine spätere Vergrößerung des Elementnetzes an dieser Stelle blockiert ist. Der Verlauf der Simulation anhand der Anzahl der Freiheitsgrade wird in Abbildung 8.18 veranschaulicht.

Der Vergleich zwischen berechneten und experimentell ermittelten Risspfad ist in Ab-

bildung 8.19 zu sehen und zeigt eine gute Übereinstimmung der Simulation mit dem Versuch. Die geringen Abweichungen sind auf einen zu groß gewählten Parameter  $\Delta a_i^{\max}$  zurückzuführen, aufgrund dessen das Krümmungsverhalten des Risspfades schlechter abgebildet wird. In Abbildung 8.20 ist die Abhängigkeit der Schwingbreite des Spannungsintensitätsfaktors  $\Delta K_I$  von der Rissverlängerung  $\Delta a$  dargestellt. Die Ergebnisse für die Simulation des Ermüdungsrisswachstums mit der Kerblage  $s_K = 18 \text{ mm}$  sind in Abbildung 8.21 zu sehen.

Parameter	Wert
Elastizitätsmodul	$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
Querkontraktionszahl	$\nu = 0,3$
Schwellwert der Spannungsintensität	$\Delta K_{\text{th}} = 10 \text{ MPa} \sqrt{\text{mm}}$
Schwellbelastung	$\Delta q = 10 \text{ Nmm}^{-2}$
max. inkrementelle Risswachstumslänge	$\Delta a_i^{\max} = 3 \text{ mm}$
Anzahl der Lastschritte	$N_{\text{Ls}} = 1$
Genauigkeit des iterativen FE-Solvers	$\epsilon_{\text{slv}} = 10^{-3}$
Verfeinerungsparameter	$\alpha_E^f = 0,8$
Vergrößerungsparameter	$\alpha_E^g = 10^{-3}$
min. Anzahl von Element-Teilungen	$N_T = 5\%$
Anzahl der Berechnungskonturen	$n_\Gamma = 3$
Radien der Kontur-Suchkreise	$r_\Gamma = 0,4/1,0/1,6 \text{ mm}$
Genauigkeit der bruchmech. Berechnung	$\epsilon_J = 10^{-2}$

Tabelle 8.6.: Material- und Berechnungsparameter

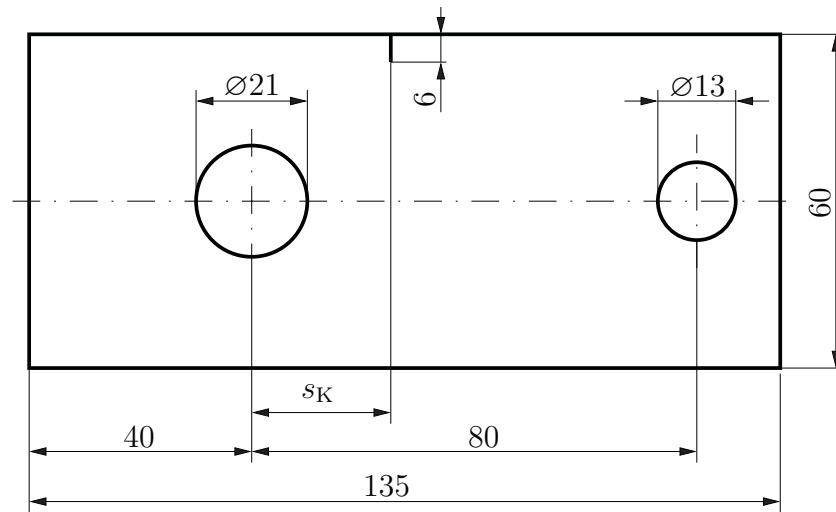
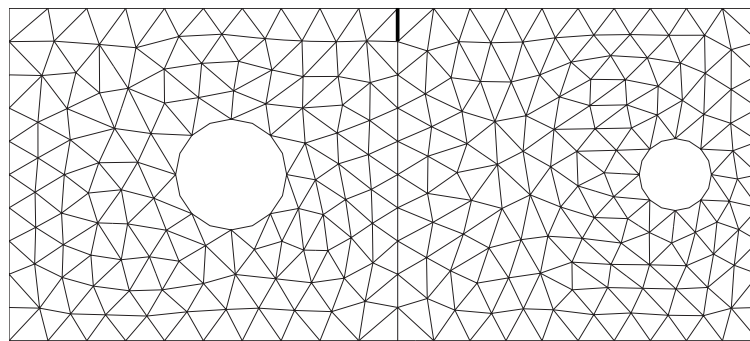
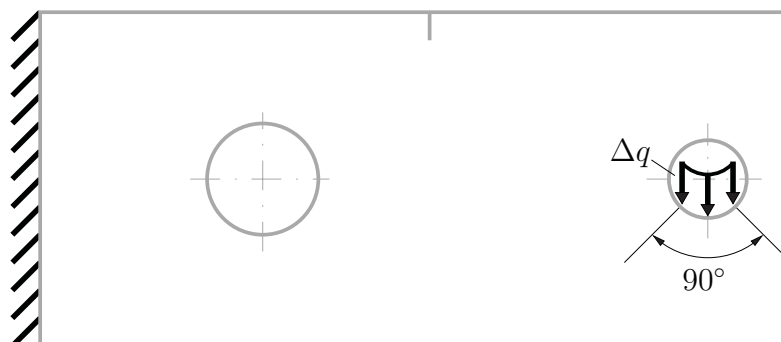


Abbildung 8.15.: Abmessungen der verwendeten Biegeprobe (Angaben in Millimeter, Modelldicke = 1 mm)



(a)



(b)

Abbildung 8.16.: Startvernetzung und Randbedingungen des verwendeten Berechnungsmodells ( $s_K = 30$  mm)

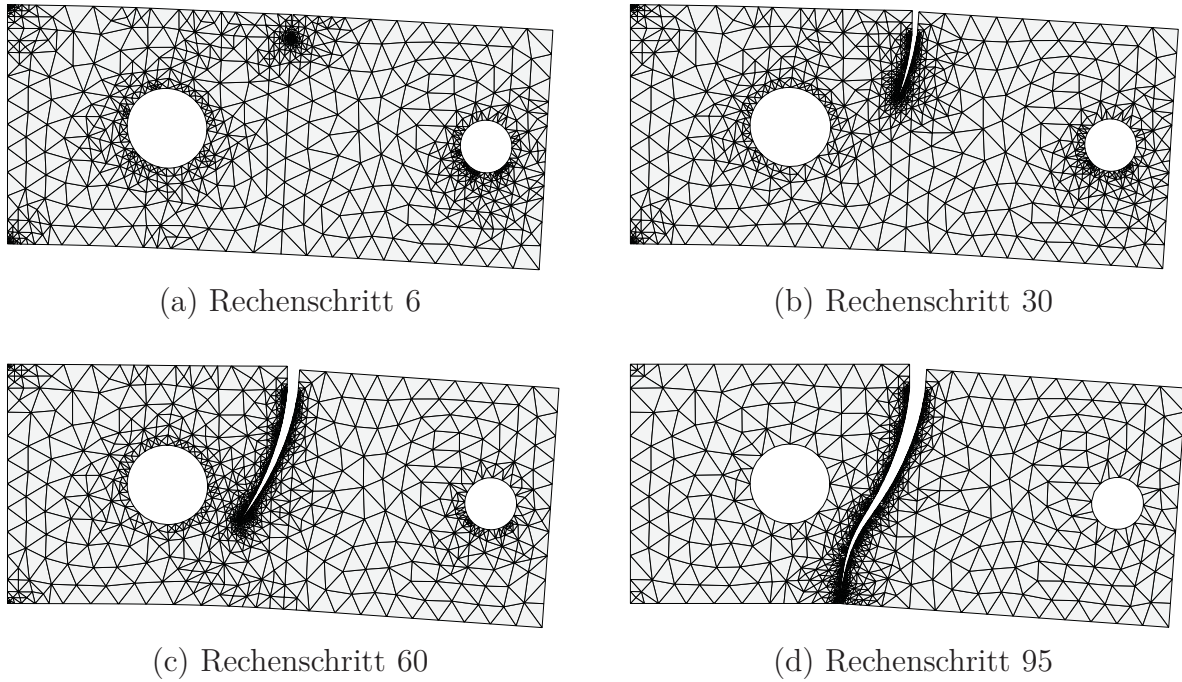


Abbildung 8.17.: Berechnungsergebnisse für unterschiedliche Phasen der Risswachstums-Simulation ( $s_K = 30$  mm, überhöhte Darstellung der Verschiebungen)

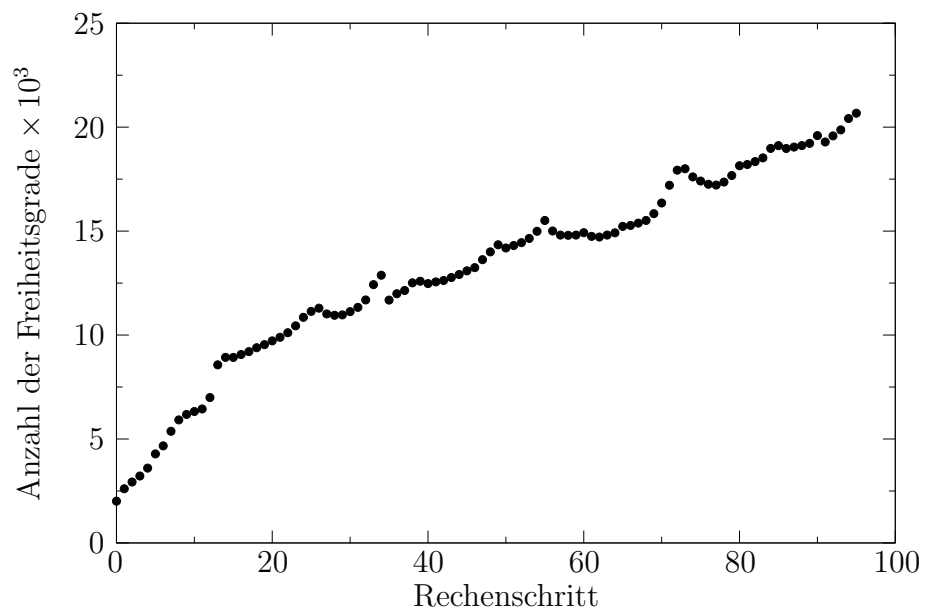
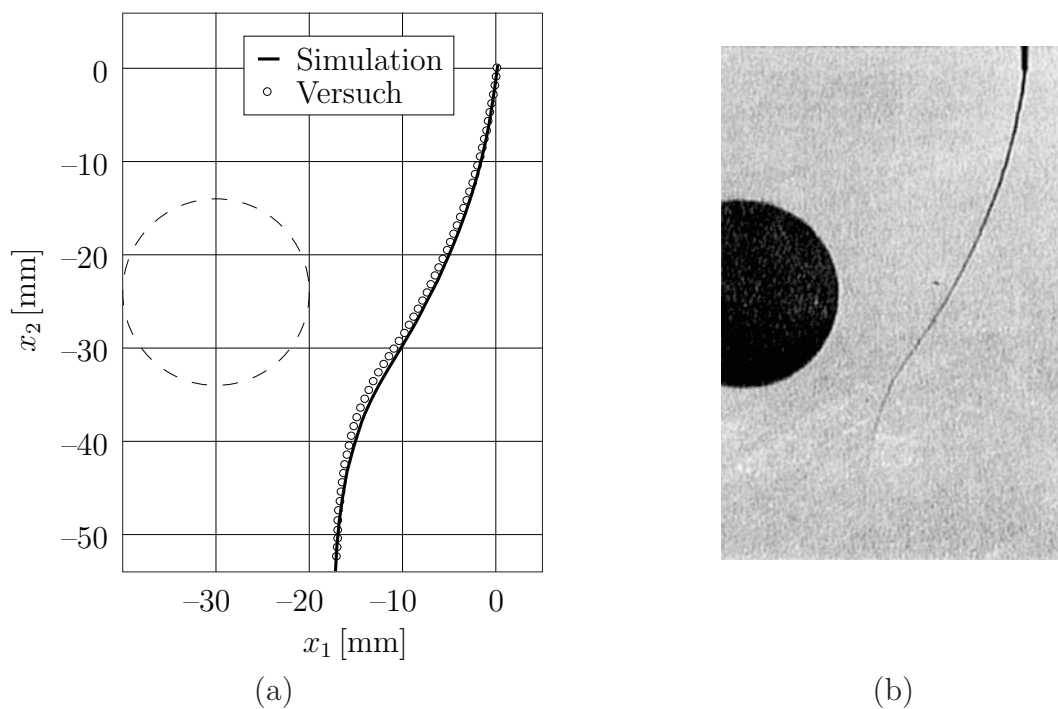
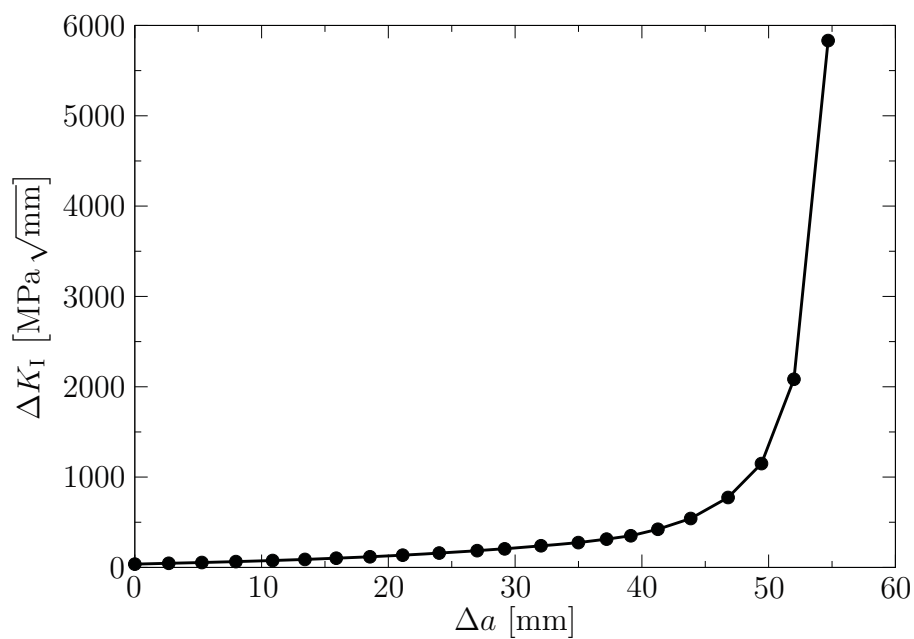


Abbildung 8.18.: Verlauf der Risswachstums-Simulation ( $s_K = 30$  mm)

Abbildung 8.19.: Vergleich von Simulation und Versuch ( $s_K = 30$  mm)Abbildung 8.20.: Schwingbreite  $\Delta K_I$  als Funktion der Rissverlängerung  $\Delta a$  ( $s_K = 30$  mm)

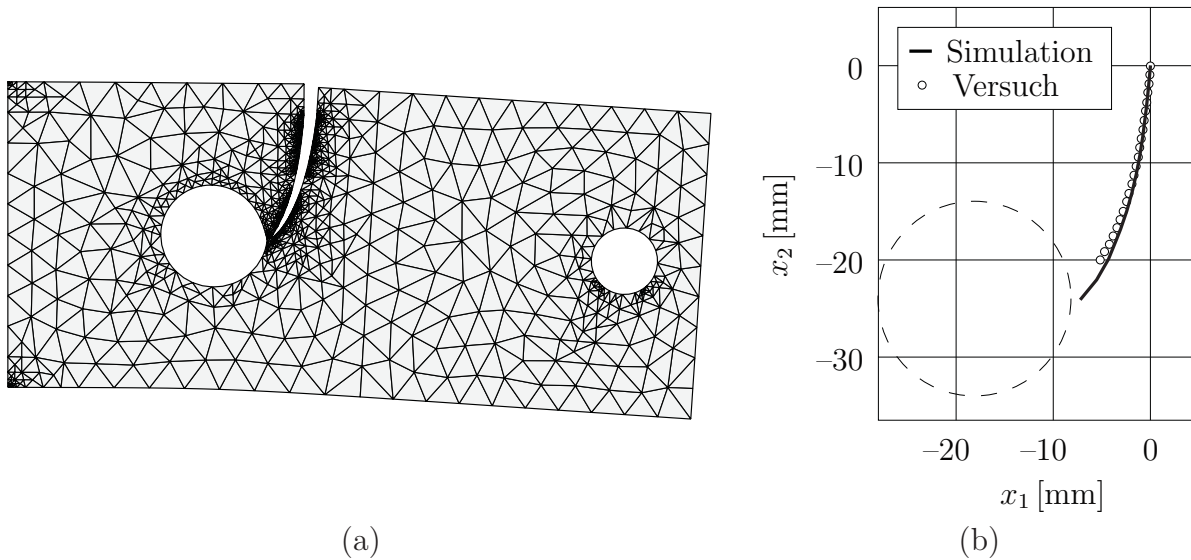


Abbildung 8.21.: Vergleich von Simulation und Versuch für die Biegeprobe mit veränderter Kerblage ( $s_K = 18$  mm, überhöhte Darstellung der Verschiebungen)

### 8.1.3. Untersuchung des Einflusses von Materialeinschlüssen auf das Risswachstum

Im Folgenden soll die unterkritische Rissausbreitung in einem Werkstoff mit Einschlüssen betrachtet werden. Das Risswachstum wird dabei wesentlich von der Größe, Form und Verteilung der Materialeinschlüsse beeinflusst. Die Beschreibung der Wechselwirkung von Risspitze und Materialeinschluss sowie deren Auswirkung auf das Risswachstum kann deshalb nur durch eine geeignete mikromechanische Modellierung erfolgen. Unter Verwendung des entwickelten Programms zur Simulation von Risswachstum in linear-elastischem Material wurde im Rahmen einer Studienarbeit [114] die Ermüdungsrissausbreitung in der Nähe von Materialeinschlüssen untersucht.

Das verwendete Berechnungsmodell ist in Abbildung 8.22 zu sehen. Es wurde eine Parameterstudie durchgeführt, bei der einerseits der Abstand  $b$  zum Ligament, andererseits die elastische Eigenschaft des Einschlusses variierte. Der Materialeinschluss wurde dabei auf zwei verschiedene Arten implementiert:

1. als ein Hohlraum mit einer spannungsfreien Oberfläche und
2. in Form eines anderen Materials (z.B. Graphitteilchen), welches fest mit der umgebenden Matrix verbunden ist.

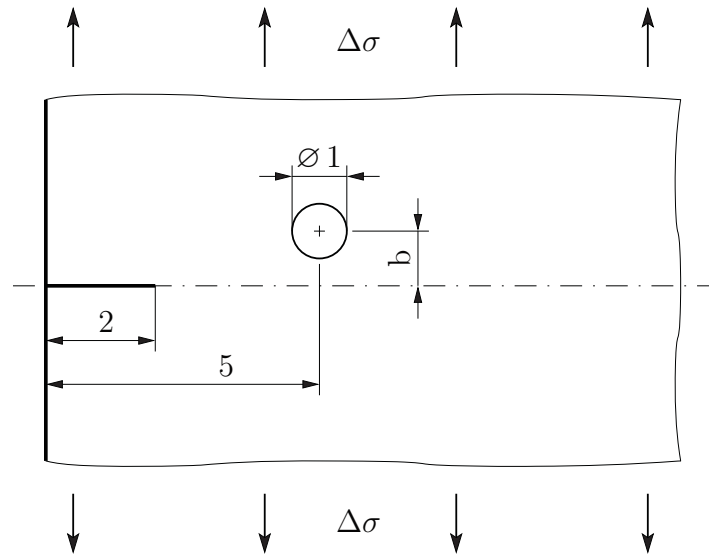


Abbildung 8.22.: Berechnungsmodell (Abmessungen sind dimensionlos und normiert)

Im zweiten Fall kann durch die Wahl eines extrem hohen Elastizitätsmoduls für den Materialeinschluss (in Bezug auf das Matrixmaterial) ein Teilchen mit einer fast starren Oberfläche simuliert werden. Der Hohlraum sowie das starre Teilchen können somit als zwei Grenzfälle für eine Inhomogenität im Material betrachten werden. Der Abstand des Einschlusses zum Ligament wurde, beginnend bei  $b = 1 \text{ LE}^2$ , in Schritten von  $0,1 \text{ LE}$  verringert. Die Belastung wird mittels einer Wechsellast  $\Delta\sigma$  ( $R = 0$ ) aufgebracht, wobei deren Größe keinen Einfluss auf den Verlauf der Risspitze hat. Für den Schwellwert  $K_{\text{th}}$  wurde ein sehr kleiner Wert angenommen, so dass es in jedem Fall zum Risswachstum kommt. Sobald der Riss während der Simulation den Einschluss erreichte, wurde die Rechnung abgebrochen.

Die Anfangsrisslänge wurde mit  $a = 2 \text{ LE}$  festgelegt. Der gewählte Wert für den Parameter zur Rissverlängerung  $\Delta a_i^{\text{max}} = 0,1 \text{ LE}$  ergab sich aus mehreren Versuchen mit unterschiedlichen Rissverlängerungslängen und stellt ein gutes Verhältnis zwischen Rechenzeit und Simulationsgenauigkeit dar. Größere Schrittweiten hatten zur Folge, dass der Rissverlauf, insbesondere in der Nähe des Einschlusses, eine sehr „kantige“ Form mit verhältnismäßig starken Winkeländerungen annahm. Im Folgenden sollen die berechneten Rissverläufe der verschiedenen Modelle miteinander verglichen werden.

Die Ergebnisse der Simulationen mit der Modellierungsvariante 1 (Einschluss als Hohlraum) für verschiedene Abstände zum Ligament sind in Abbildung 8.23 zu sehen. Die resultierenden Kurven repräsentieren den Verlauf der Risspitze während des Wachstums.

---

<sup>2</sup> LE = Längeneinheit

Die Risspfade sowie die zugehörigen Einschlüsse sind maßstabsgerecht in den Diagrammen dargestellt. Wie zu erkennen ist, bewirkt ein Hohlraum in der Nähe der Risspitze, dass diese in Richtung der Störung wandert. Je kleiner der Abstand des Einschlusses zum Ligament des Ausgangsrisses (horizontale Linie bei  $x_2 = 0$ ) wird, desto stärker ist die Ablenkung des Risses. Interessant ist, dass sich für die Abstände  $b = 1,0$  LE und  $b = 0,9$  LE der Riss hinter dem Lochmittelpunkt wieder zurück krümmt. Wächst der Riss weiter, verliert die Störung an Einfluss auf dessen Richtung, wodurch ein zum Ligament paralleler Verlauf zustande kommt.

Verläuft der Riss zu nahe am Hohlraum, dringt er in diesen ein. Der kritische Abstand liegt bei den vorliegenden Berechnungen bei  $0,8 \text{ LE} < b < 0,9 \text{ LE}$ . Durch die Auswertung der Risspitzenkoordinaten lässt sich feststellen, dass zu Beginn der Simulation eine Auslenkung der Risspitze in die vom Hohlraum abgewandte Richtung erfolgt. Für kleinere Abstände  $b$  verstärkt sich diese Erscheinung, wie im Diagramm für  $b = 0,5$  LE recht gut zu erkennen ist.

Für die Modellierungsvariante 2 (starrer Einschluss) sind ausgewählte Simulationsergebnisse in der Abbildung 8.24 dargestellt. Die durchgeführten Berechnungen zeigen hier, dass Risse von starren Einschlüssen eher abgestoßen werden als dass sie, wie z.B. beim Hohlraum, versuchen, die Oberfläche des Einschlusses zu durchdringen. Im Ergebnisdiagramm für  $b = 0,4$  LE ist ebenfalls sehr gut eine gegensätzliche Auslenkung der Risspitze zu Beginn der Simulation zu erkennen, diesmal aber in Richtung des starren Einschlusses.

Weitere Untersuchungen sind auf diese Weise möglich, um die genauen Zusammenhänge zwischen Risswachstum und dem Einfluss von Materialeinschlüssen aufzuklären.



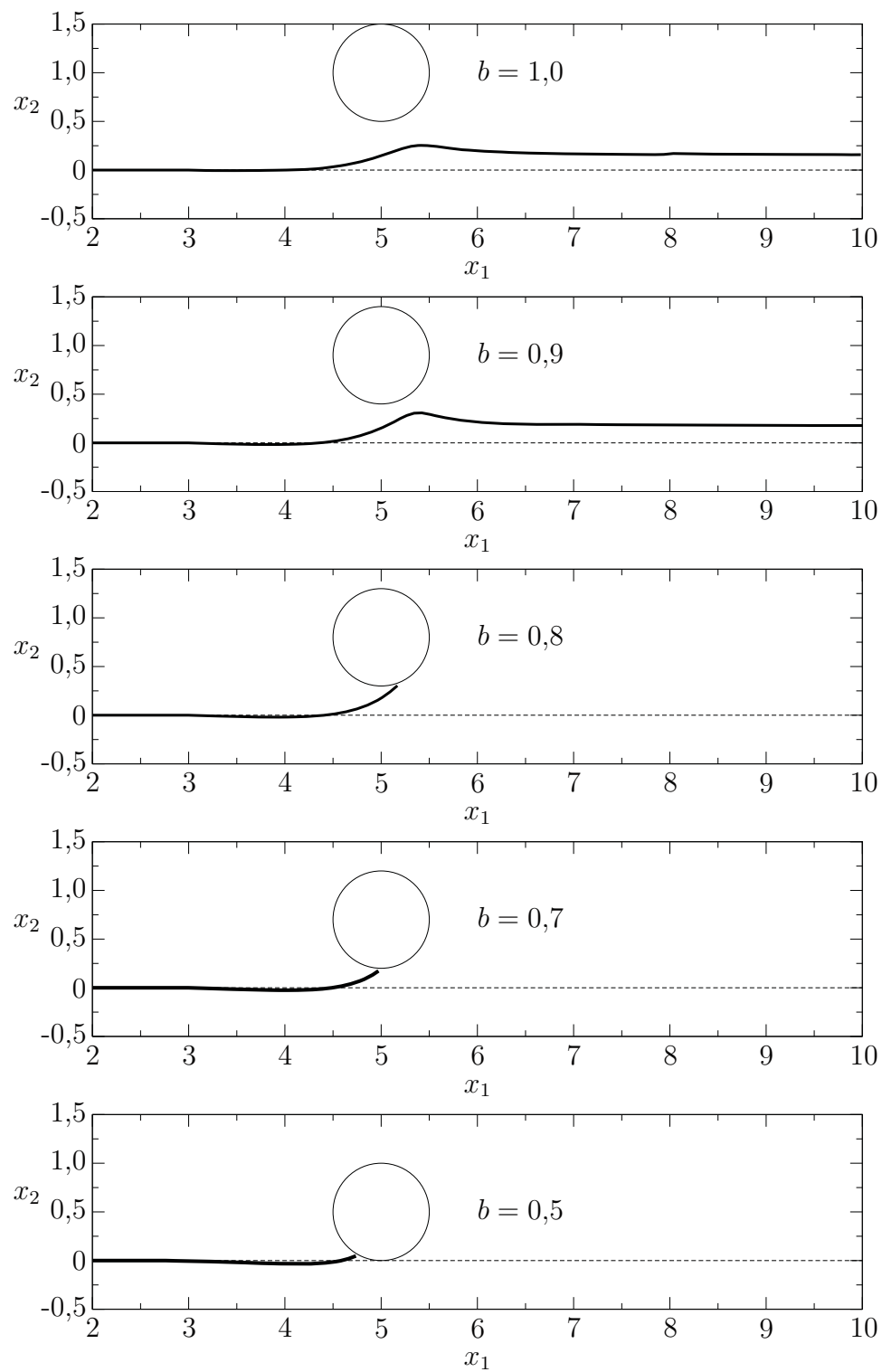


Abbildung 8.23.: Rissverläufe für Modelle mit Hohlraum

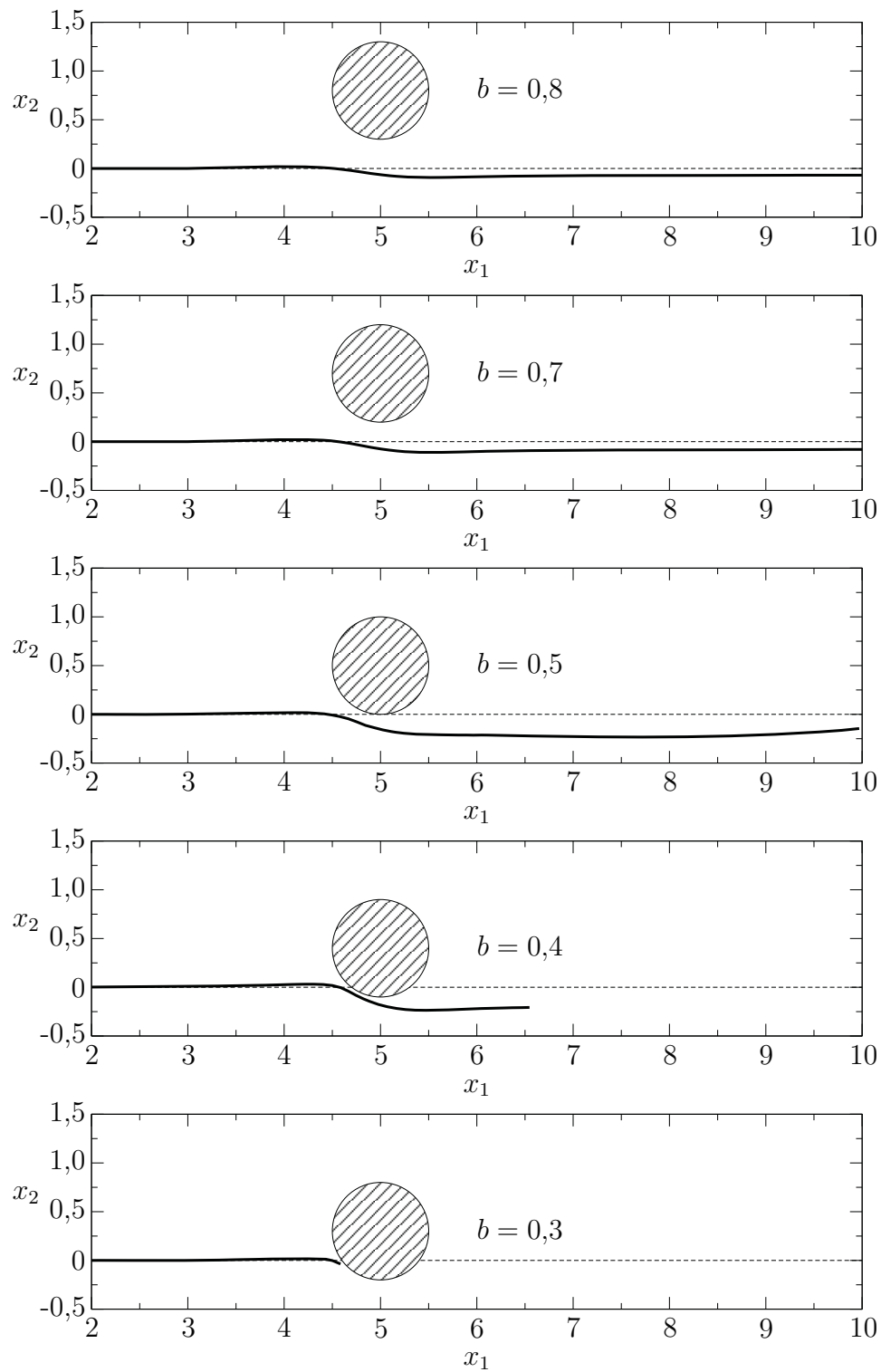


Abbildung 8.24.: Rissverläufe für Modelle mit starrem Materialeinschluss

## 8.2. Modellierung des Risswachstums bei elasto-plastischem Materialverhalten

### 8.2.1. Rissausbreitung unter Modus-I-Beanspruchung in CT-Probe

Für die Bestimmung des Last-Aufweitungsverhaltens und des Risswiderstandes von CT-Proben sind in [116] entsprechende Versuche bei verschiedenen Temperaturen durchgeführt worden. Die aus dem Stahl des Typs 22NiMoCr3-7 gefertigten Proben wurden durch eine Zugmaschine im Teilentlastungsverfahren (Compliance-Methode) [24] belastet, so dass duktils Risswachstum auftrat. Die Versuchsdurchführung (siehe Abbildung 8.25) erfolgte weggesteuert und es wurden die Reaktionskraft  $F$  sowie die Kerbaufweitung  $v$  gemessen.

Unter Verwendung des in Abschnitt 7.3 beschriebenen Algorithmus zur Simulation von duktilem Risswachstum soll das Experiment für die CT-Probe<sup>3</sup> mit der Probendicke  $B = 25$  mm und dem Dicken-Breitenverhältnis  $B/W = 0,5$  bei einer Versuchstemperatur von 20°C numerisch simuliert werden. Die verwendete Probe war 20% seitengekerbt und mit einem Ermüdungsanriss (Risstiefenverhältnis  $a/W = 0,522$ ) versehen. Die experimentell ermittelte Kraft-Weg-Kurve (F-v-Kurve) des Zugversuchs ist in Abbildung 8.25b dargestellt.

Die Abmessungen für das ebene Berechnungsmodell der CT-Probe sind in Abbildung 8.26 zu sehen und entsprechen den Vorgaben des ASTM-Standards E 1820 [6]. Für die Modelldicke wird hierbei der Nettowert  $B_n$  der Probendicke  $B$ , d.h. die Gesamtdicke der CT-Probe abzüglich der Tiefe der Seitenkerben, angenommen. Die Randbedingungen sowie die symmetrische Vernetzung des FE-Modells zeigt Abbildung 8.27. Das kreisförmige Gebiet um den Lastangriffspunkt wird hierbei elastisch modelliert, um eine unnötige Plastifizierung in diesem Bereich zu vermeiden.

In Tabelle 8.7 sind die verwendeten Simulationsparameter aufgeführt. Es werden die elementbasierten Fehlerindikatoren genutzt und eine Netzvergrößerung wird nicht zugelassen. Die maximale Länge für die inkrementelle Rissverlängerung  $\Delta a_i^{\max}$  wurde in derselben Größe wie der Schwellwert für die minimale Elementkantenlänge  $l_K^{\min}$  festgelegt, so dass das inkrementelle Risswachstum jeweils in der Größenordnung einer Kantenlänge stattfindet. Um den numerischen Aufwand für die Simulation zu begrenzen, wurde entsprechend den FE-Analysen in [116]  $l_K^{\min} = 0,5$  mm gewählt.

---

<sup>3</sup>in [116] wird diese Probe mit C(T)25 bezeichnet

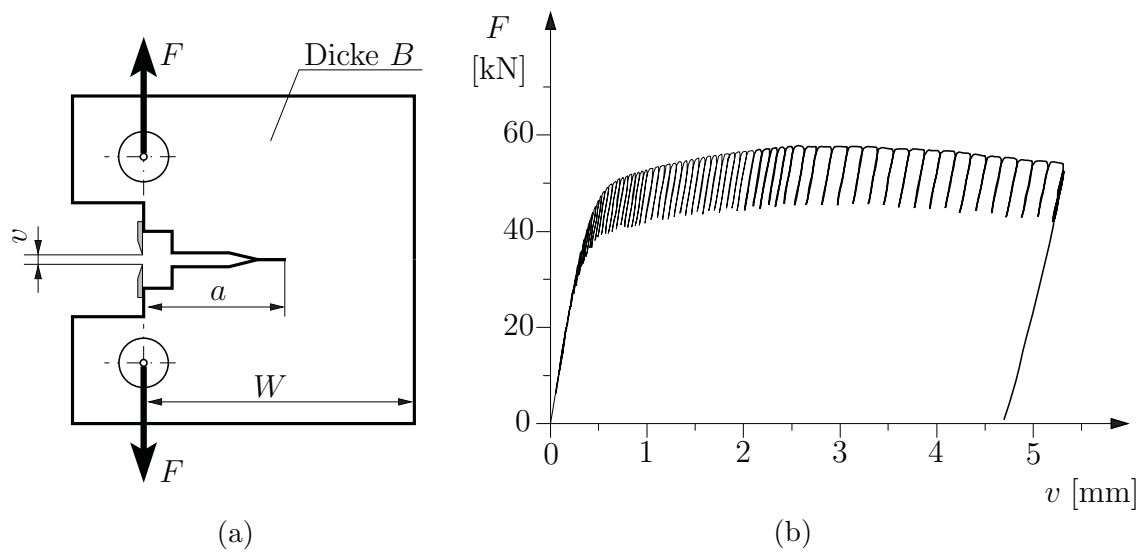
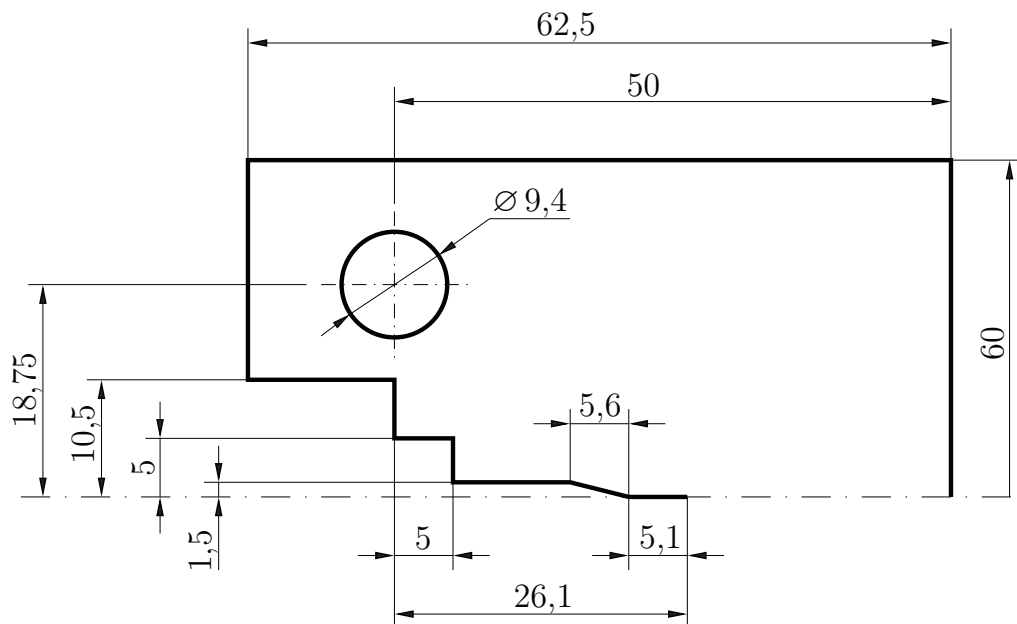


Abbildung 8.25.: CT-Probe und Kraft-Weg-Kurve des Zugversuchs

Abbildung 8.26.: Abmessungen des symmetrischen Berechnungsmodells  
(Angaben in Millimeter, Modelldicke  $B_n = 20$  mm)

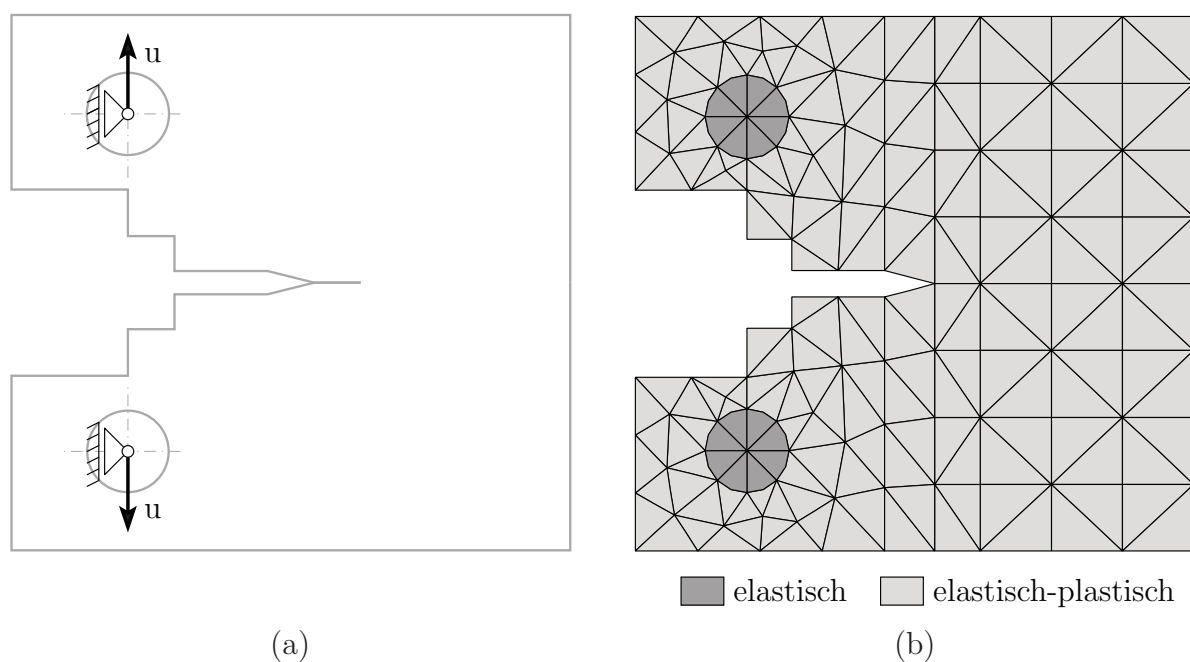


Abbildung 8.27.: Randbedingungen und FE-Vernetzung des Berechnungsmodells

Parameter	Wert
vorgegebene Verschiebung	$u = 2,5 \text{ mm}$
Anzahl der Lastschritte	$N_{\text{Ls}} = 500$
Verfeinerungsparameter (Fehler d. Gleichgewichts)	$\alpha_{\text{E}}^{\text{f}} = 0,8$
Verfeinerungsparameter (Fehler d. Fließbedingung)	$\alpha_{\text{Y}}^{\text{f}} = 0,1$
Vergrößerungsparameter	$\alpha_{\text{E}}^{\text{g}}, \alpha_{\text{Y}}^{\text{g}} = 0,0$
Abbruchparameter (Fehler d. Gleichgewichts)	$\alpha_{\text{E}}^{\text{th}} = 10^{-3}$
Abbruchparameter (Fehler d. Fließbedingung)	$\alpha_{\text{Y}}^{\text{th}} = 1,0$
Grenzwert für minimale Kantenlänge	$l_{\text{K}}^{\text{min}} = 0,5 \text{ mm}$
kritisches Hohlraumvolumen für Netzverfeinerung	$f_{\text{c}}^{\text{net}} = 3 \cdot 10^{-4}$
maximale inkrementelle Rissverlängerung	$\Delta a_{\text{i}}^{\text{max}} = 0,5 \text{ mm}$
Anzahl der Schritte zur Rissöffnung	$N_{\text{co}} = 10$

Tabelle 8.7.: Parameter für Risswachstumssimulation

Parameter	Wert
Elastizitätsmodul	$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
Querkontraktionszahl	$\nu = 0,3$
Anfangshohlraumvolumen	$f_0 = 1,7 \cdot 10^{-4}$
Rousselier-Parameter	$\sigma_1 = 445 \text{ MPa}$
Rousselier-Parameter	$D = 2$
Anfangsfließspannung	$\sigma_0 = 420 \text{ MPa}$
Verfestigungsparameter	$\varepsilon_0 = 0,0095$
Verfestigungsexponent	$n_\sigma = 0,1625$
charakteristische Länge	$l_c = 0,5 \text{ mm}$

Tabelle 8.8.: Materialparameter des Rousselier-Modells für den Werkstoff 22NiMoCr3-7

Für den Werkstoff 22NiMoCr3-7 wurden die Materialparameter für das Rousselier-Modell aus [116] übernommen und sind in Tabelle 8.8 aufgeführt. Die Materialkenngrößen für die Entwicklung der Matrixfließspannung (4.3) wurden dabei über eine iterative nicht-lineare Kurvenanpassung aus der in [116] vorgegebenen Fließkurve bestimmt. Ein Vergleich zwischen vorgegebener und parametrisierter Fließkurve ist in Abbildung 8.28 zu sehen. Ein noch unbekannter Materialkennwert ist hier die charakteristische Länge  $l_c$  der nichtlokalen Regularisierung (4.23) und wird für die Simulation zuerst mit  $l_c = l_K^{\min}$  festgelegt.

Abbildung 8.29 zeigt den Vergleich der Kraft-Weg-Kurven zwischen Experiment und Simulation. Der zackenförmige Verlauf ist auf das inkrementelle Risswachstum zurückzuführen, aufgrund dessen es zu einem steilen Abfall der Reaktionskraft in der Simulation kommt. Unter der Voraussetzung sehr kleiner Werte für die Lastschrittweite und Rissverlängerung würde man eine geglättete Kurve erhalten, die sich dem „wahren“ Kurvenverlauf annähert. Das adaptiv verfeinerte FE-Netz des gesamten Berechnungsmodells und der Bereich, in dem der Riss gewachsen ist, sind in Abbildung 8.30 zum Simulationsende dargestellt. Die Vernetzung um die Risspitze ist vor allem durch die Elementteilung aufgrund der Verfeinerungsbedingung  $f \geq f_c^{\text{net}}$  geprägt, während in den restlichen Bereichen des Berechnungsmodells der Elementfehlerschätzer für die adaptive Verfeinerung verantwortlich ist. Die Werkstoffschädigung im Bereich der Rissverlängerung, veranschaulicht durch den Hohlraumvolumenanteil  $f$ , ist in Abbildung 8.31 zu sehen. Zum Ende der Simulation beträgt die Rissverlängerung  $\Delta a = 2,99 \text{ mm}$ .

Als nächstes soll der Einfluss der Parameter  $l_K^{\min}$  und  $\Delta a_i^{\max}$  auf die Simulation betrachtet werden. Abbildung 8.32 zeigt für verschiedene Parameterwerte die entsprechenden  $F$ - $v$ -Kurven. Verkleinert man die Größe des Schwellwertes der minimalen Kantenlänge auf  $l_K^{\min} = \frac{1}{4} \Delta a_i^{\max} = 0,125 \text{ mm}$ , so wird das Elementnetz an der Risspitze adaptiv feiner gestaltet und das inkrementelle Risswachstum erfolgt entlang von vier Elementkanten

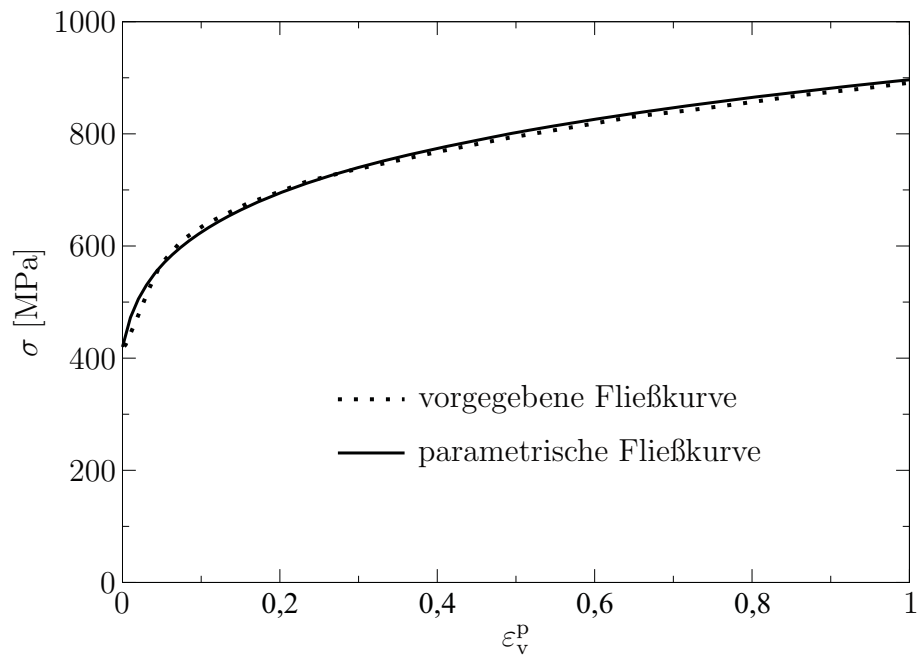


Abbildung 8.28.: Fließkurve des Werkstoffs 22NiMoCr3-7

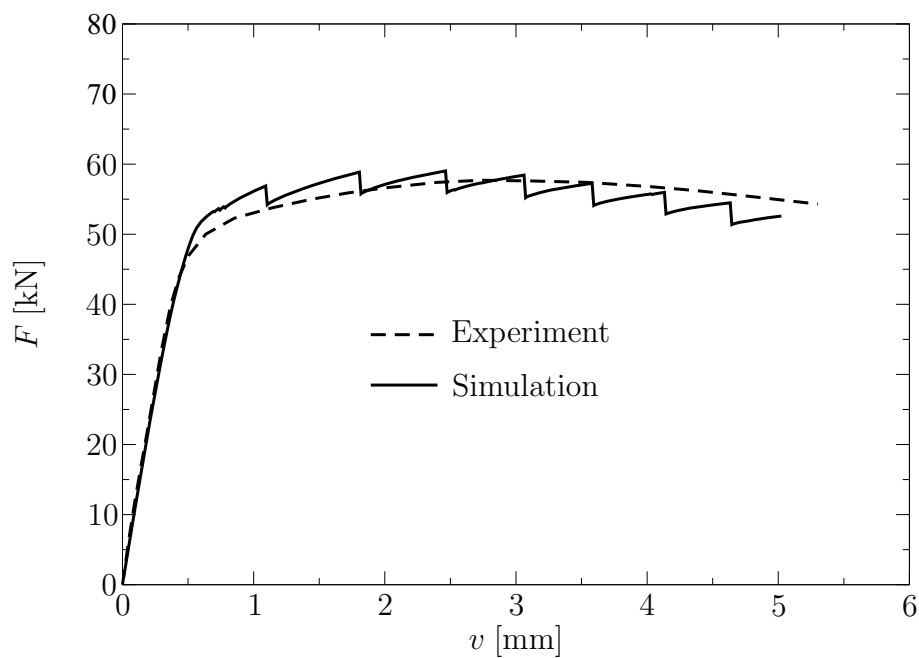


Abbildung 8.29.: Vergleich der Kraft-Weg-Kurven

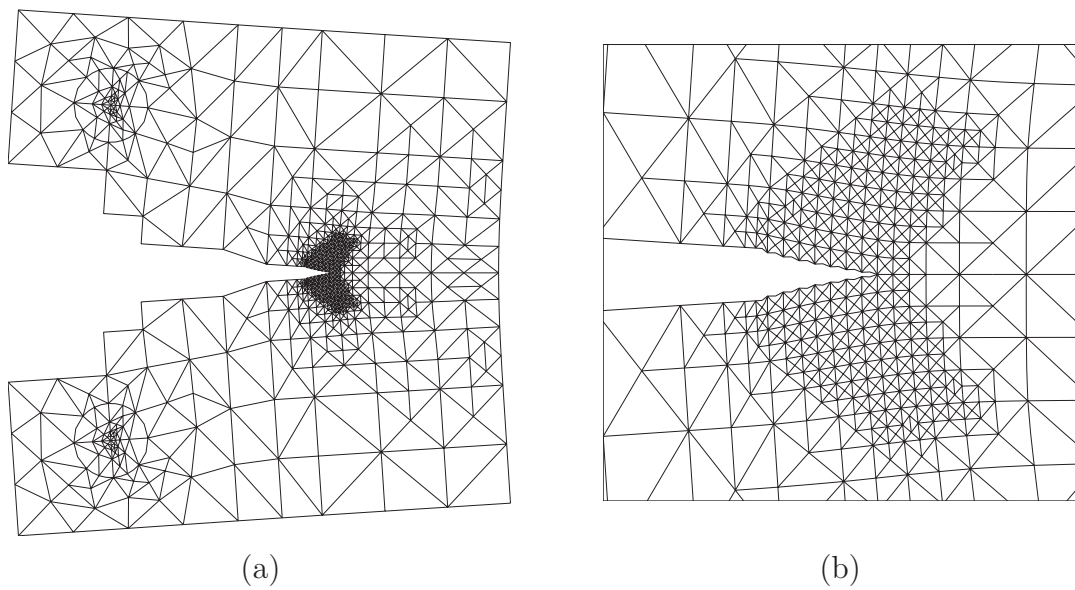


Abbildung 8.30.: Deformiertes FE-Netz und Detail der Rissvernetzung

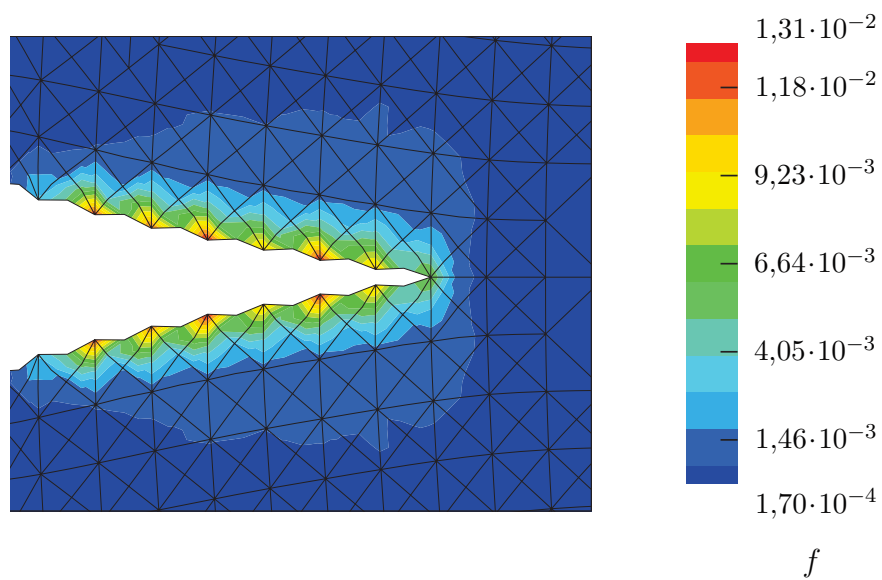


Abbildung 8.31.: Berechnetes Hohlraumvolumen im Bereich der Rissverlängerung



statt einer. Im Ergebnis dieser Änderung erhält man bei gleicher Kerbaufweitung  $v$  der CT-Probe eine fünf mal größere Rissverlängerung ( $\Delta a = 16,43$  mm) und dadurch einen starken Abfall in der Reaktionskraft. Verringert man die maximale inkrementelle Rissverlängerung mit  $\Delta a_i^{\max} = 0,125$  mm ebenfalls auf ein Viertel des Startwertes, erfolgt das inkrementelle Risswachstum wieder entlang einer Elementkante. Der starke Kraftabfall verschwindet und für die Rissverlängerung erhält man  $\Delta a = 4,73$  mm. Offensichtlich liefert das inkrementelle Risswachstum entlang einer Elementkante die besten Ergebnisse.

Für die beiden Varianten  $l_K^{\min} = \frac{1}{4}\Delta a_i^{\max} = 0,125$  mm und  $l_K^{\min} = \Delta a_i^{\max} = 0,125$  mm ist in Abbildung 8.33 die plastische Vergleichsdehnung  $\varepsilon_v^p$  im Bereich der Rissausbreitung für den Lastschritt  $u = 0,35$  mm vergleichend zu sehen. Bis zu diesem Zeitpunkt sind für beide Varianten drei inkrementelle Verlängerungen des Risses erfolgt. Aufgrund der unterschiedlichen Längen für die inkrementelle Rissausbreitung stellen sich jeweils unterschiedliche plastische Verformungszustände entlang des neuen Rissabschnittes ein. Die im Verlauf der Rissöffnung entstehenden plastischen Verformungen konzentrieren sich hauptsächlich in den jeweils aktuellen Rissspitzenelementen. Das bedeutet, dass für die Variante  $l_K^{\min} = \frac{1}{4}\Delta a_i^{\max} = 0,125$  mm in Abbildung 8.33a nicht alle Elemente entlang der neuen Rissufer den gleichen Deformationsprozessen unterliegen. Die gleichen Vorgänge kann man auch für die Schädigung  $\beta$  bzw. das Hohraumvolumen  $f$  beobachten. Der akustische Tensor an der Rissspitze versagt in dem Fall bei geringeren Werten für  $\varepsilon_v^p$  und  $\beta$  im Vergleich zur Variante  $l_K^{\min} = \Delta a_i^{\max} = 0,125$  mm.

Für kleine Kerbaufweitungen ( $v < 1,5$  mm) gibt es eine gute Übereinstimmung zwischen den  $F$ - $v$ -Kurven mit  $l_K^{\min} = \Delta a_i^{\max} = 0,25$  mm bzw.  $l_K^{\min} = \Delta a_i^{\max} = 0,125$  mm und dem Experiment. Durch eine einfache Optimierung der Materialparameter  $l_c$  und  $\sigma_1$  soll für die Variante  $l_K^{\min} = \Delta a_i^{\max} = 0,125$  mm das Verhalten der simulierten CT-Probe an das Experiment besser angepasst werden.

In Abbildung 8.34 ist der Vergleich für die Simulationen mit verschiedenen charakteristischen Längen  $l_c$  zu sehen. Werte für  $l_c < 0,5$  mm führen dementsprechend zu einem weiteren Lastabfall am Ende der Simulation. Größere Werte als  $l_c = 0,5$  mm erscheinen hier nicht sinnvoll, da  $l_c$  eine Größe bezüglich der Mikrostruktur sein soll. Der Einfluss des Rousselier-Parameters  $\sigma_1$  auf die Kraft-Weg-Kurve der CT-Probe ist in Abbildung 8.35 zu erkennen. Mit der Variante  $\sigma_1 = 750$  MPa erzielt man eine gute Übereinstimmung mit der experimentellen Kurve. Im Ergebnis der Risswachstumssimulation beträgt die Rissverlängerung  $\Delta a = 2,86$  m.

Die Risswiderstandskurve für die Variante  $\sigma_1 = 750$  MPa ist im Vergleich zur experimentell ermittelten  $J$ - $\Delta a$ -Kurve in Abbildung 8.37 zu sehen. Eine einfache Bestimmung des  $J$ -Integrals kann über die Auswertung der zugehörigen Kraft-Weg-Kurve in Abbildung

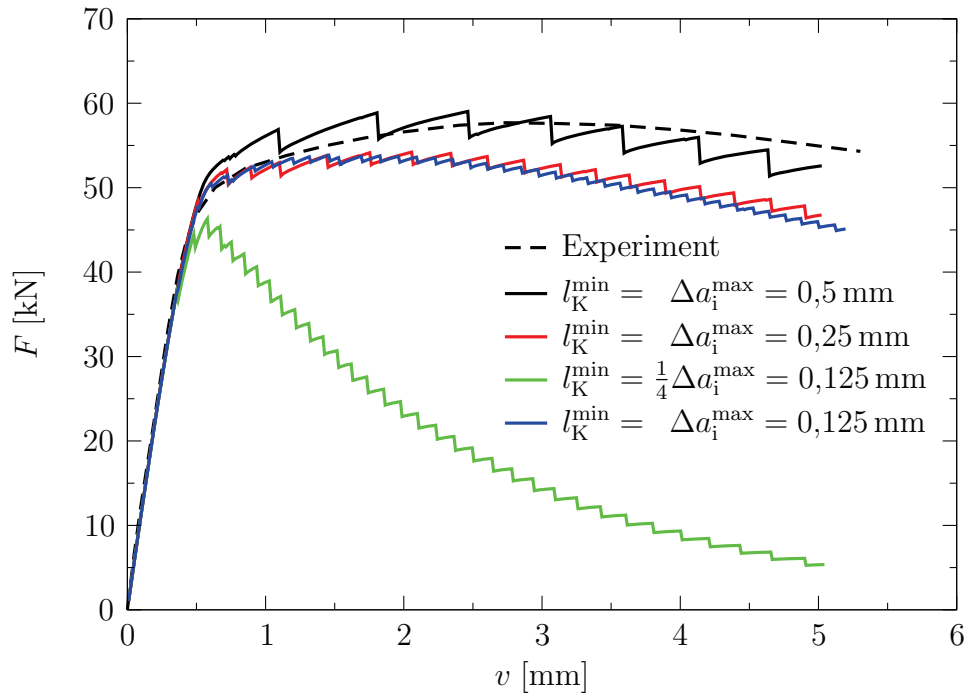
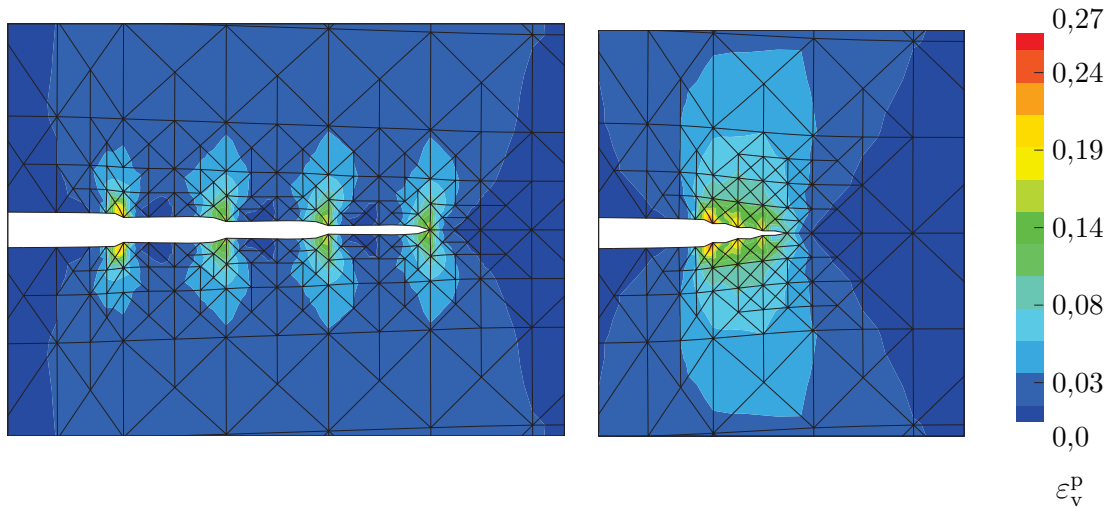


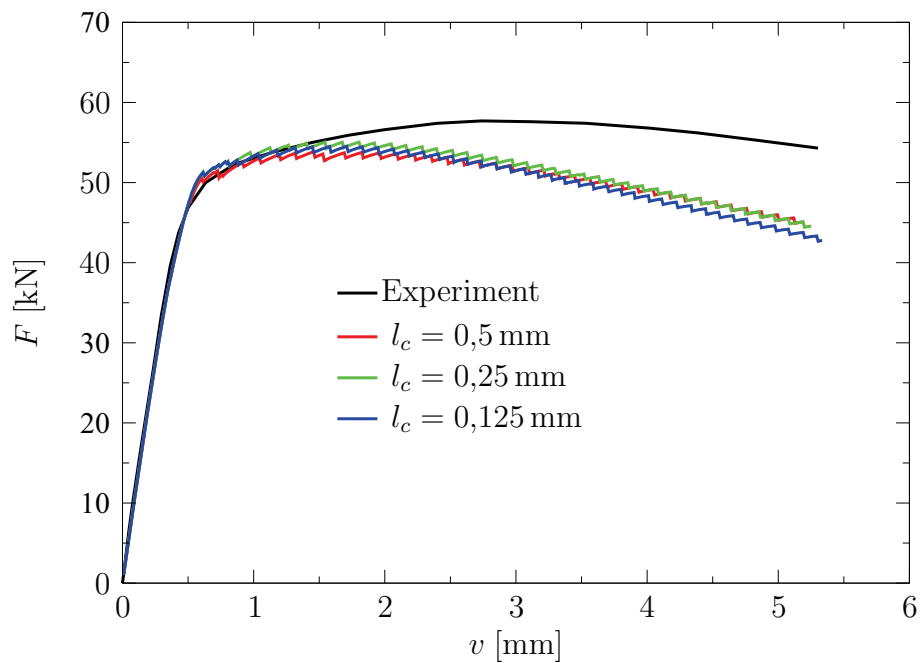
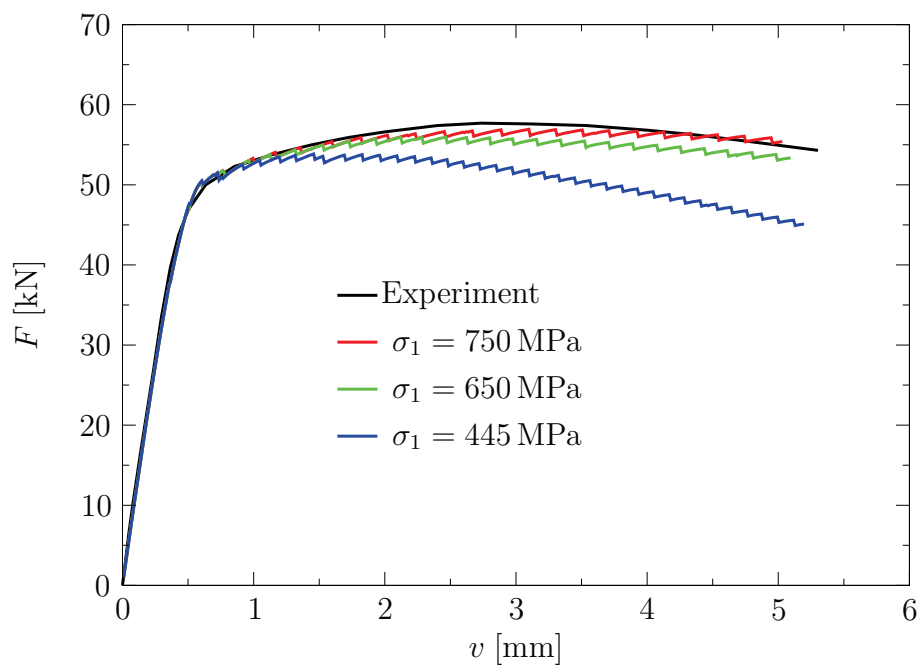
Abbildung 8.32.: Kraft-Weg-Kurven für verschiedene Parameterwerte von  $l_K^{\min}$  und  $\Delta a_i^{\max}$



(a)  $l_K^{\min} = \frac{1}{4} \Delta a_i^{\max}$

(b)  $l_K^{\min} = \Delta a_i^{\max}$

Abbildung 8.33.: Plastische Vergleichsdehnung  $\varepsilon_v^p$  im Bereich der Rissausbreitung für den Lastschritt  $u = 0,35$  mm ( $v \approx 0,66$  mm),  $l_K^{\min} = 0,125$  mm

Abbildung 8.34.: Kraft-Weg-Kurven für verschiedene  $l_c$ Abbildung 8.35.: Kraft-Weg-Kurven für verschiedene  $\sigma_1$

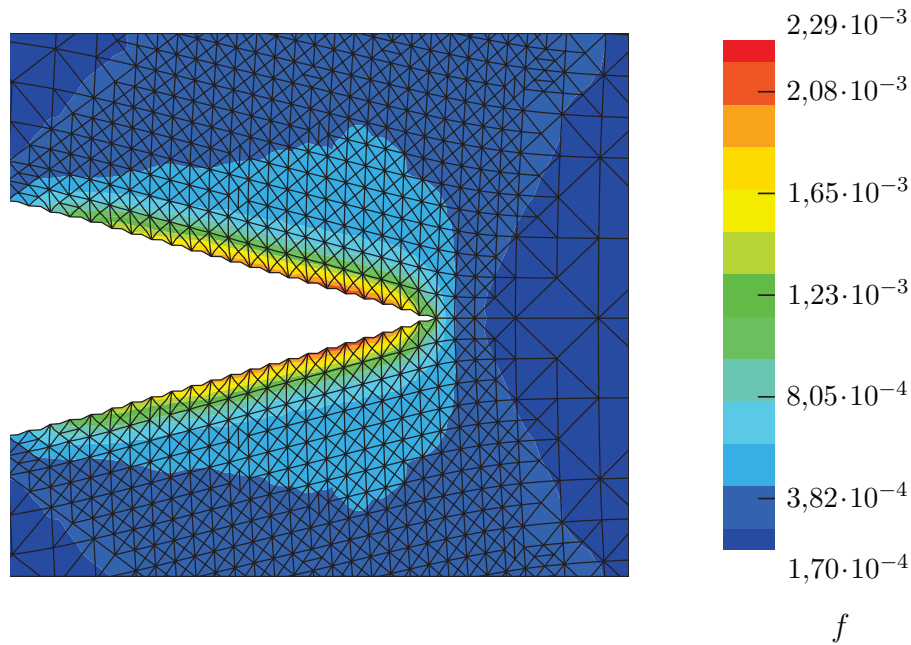


Abbildung 8.36.: Rissvernetzung und Hohlraumvolumen für  $\sigma_1 = 750 \text{ MPa}$

8.35 mit Hilfe der Beziehung

$$J = \frac{\tilde{\eta} \tilde{A}}{B_n(W - a)} \quad (8.3)$$

erfolgen [24] und ist lastschrittweise anzuwenden. Mit  $\tilde{A}$  wird die Fläche unter der  $F$ - $v$ -Kurve zum jeweiligen Lastschritt bezeichnet und  $B_n$  ist die Nettobreite der seitengekerbten Probe. Die Größe von  $\tilde{\eta}$  ist dabei für eine CT-Probe mit

$$\tilde{\eta} = 2 + 0,522 \left( 1 - \frac{a}{W} \right) \quad (8.4)$$

angegeben.

Ein Vergleich der Entwicklung der Freiheitsgrade wird für ausgewählte Risswachstumsimulationen in Abbildung 8.38 gezeigt. Da eine Netzvergrößerung nicht zugelassen ist, steigt im Verlauf der Simulation die Anzahl der Freiheitsgrade kontinuierlich an. Erwartungsgemäß ist die Anzahl der Freiheitsgrade größer, je kleiner der Wert für den Parameter  $l_K^{\min}$  vorgegeben wird. Durch den Wert der Fließspannung wird die Größe der plastischen Zone um die Risspitze beeinflusst, die dann entsprechend dem Kriterium  $f \geq f_c^{\text{net}}$  verfeinert wird. Kleinere Fließspannungen führen damit zu einem Anstieg der Freiheitsgrade.

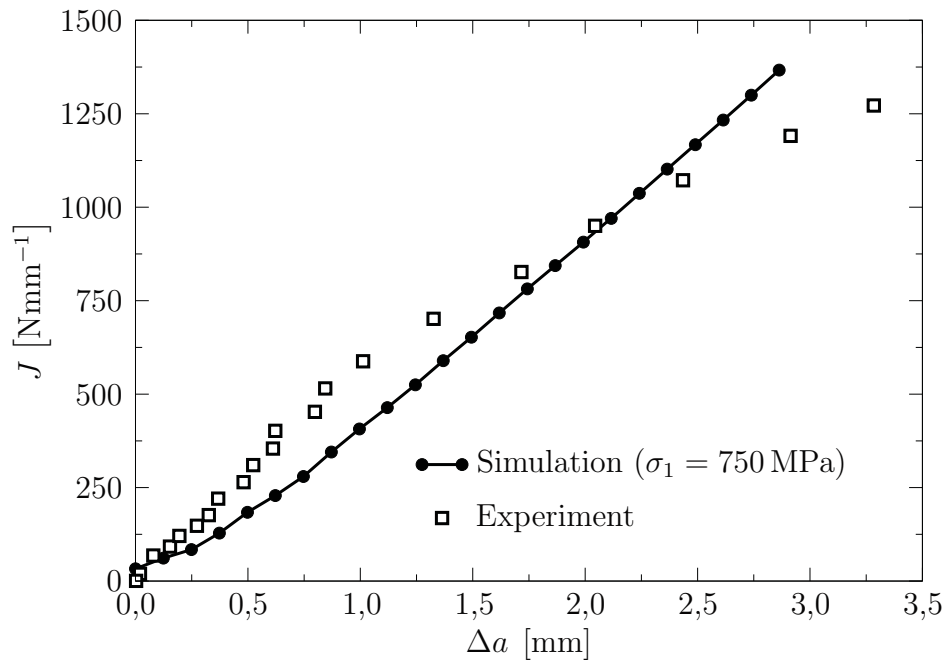
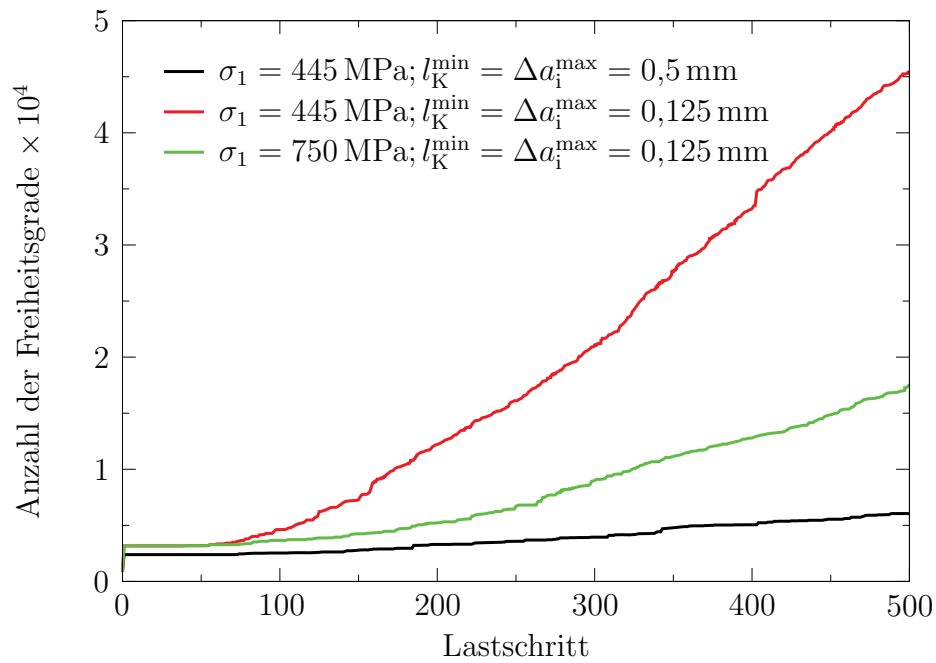


Abbildung 8.37.: Vergleich der Risswiderstandskurven

Abbildung 8.38.: Entwicklung der Freiheitsgrade während der Simulation ( $l_c = 0,5 \text{ mm}$ )

### 8.2.2. Rissausbreitung unter Mixed-Mode-Beanspruchung

Mit den folgenden Beispielen soll die Fähigkeit des Programms zur Simulation von duktiler Rissausbreitung unter einer Mixed-Mode-Beanspruchung demonstriert werden.

#### Modifizierte CT-Probe

Die im Abschnitt 8.2.1 vorgestellten CT-Probe wurde gemäß Abbildung 8.39a modifiziert. Durch diese Modifikation wird am oberen Schenkel der CT-Probe die Steifigkeit herabgesetzt und somit an der Rissspitze eine Mixed-Mode-Beanspruchung erzeugt. In Abbildung 8.39b ist das deformierte Netz zum Ende der Rissausbreitungssimulation zu sehen. Das berechnete Hohlraumvolumen im Bereich der Rissausbreitung zeigt Abbildung 8.40 und Abbildung 8.41 stellt die zur Simulation gehörende Kraft-Weg-Kurve dar.

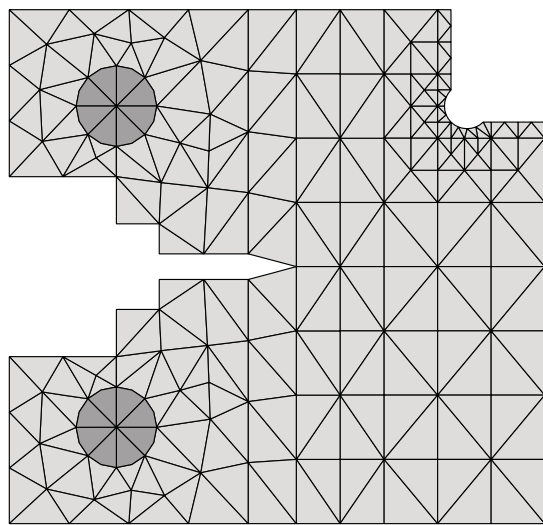
#### CTS-Probe

Für die experimentelle Untersuchung von Rissen unter einer Mixed-Mode-Beanspruchung werden unter anderem sogenannte CTS-Proben<sup>4</sup> verwendet. In Abbildung 8.42 ist eine entsprechende Versuchsanordnung dargestellt. Mit der Variation des Winkels  $\phi$  lassen sich dabei verschiedene Mixed-Mode-Zustände an der Rissspitze realisieren. Im Folgenden soll für die Winkel  $\phi = 15^\circ$  und  $\phi = 45^\circ$  die Simulation der Rissausbreitung in einer CTS-Probe gezeigt werden. Dabei werden aus Gründen der Vereinfachung die Einspannungen für die CTS-Probe elastisch modelliert.

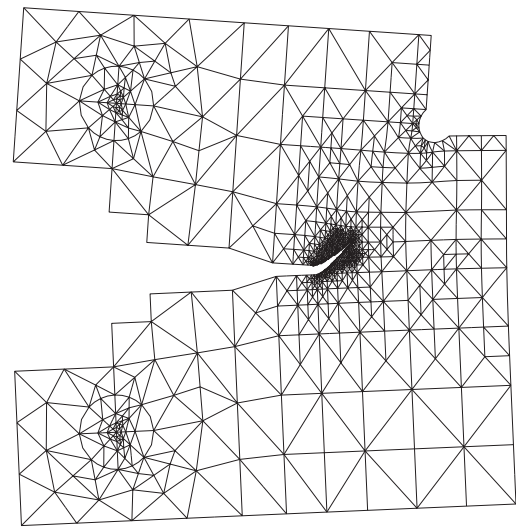
Die Abbildungen 8.43 und 8.44 zeigen das Modell und die Simulationsergebnisse für den Winkel  $\phi = 15^\circ$ . In den Abbildungen 8.45 und 8.46 sind die Ergebnisse für den Winkel  $\phi = 45^\circ$  zu sehen. Man erkennt, dass der Riss in beiden Varianten das Bestreben hat, sich in die Richtung senkrecht zur vorgegebenen Verschiebung auszubreiten.

---

<sup>4</sup>CTS - Compact Tension Shear



(a) FE-Startvernetzung



(b) Deformiertes FE-Netz am Ende der Simulation

Abbildung 8.39.: Modifizierte CT-Probe

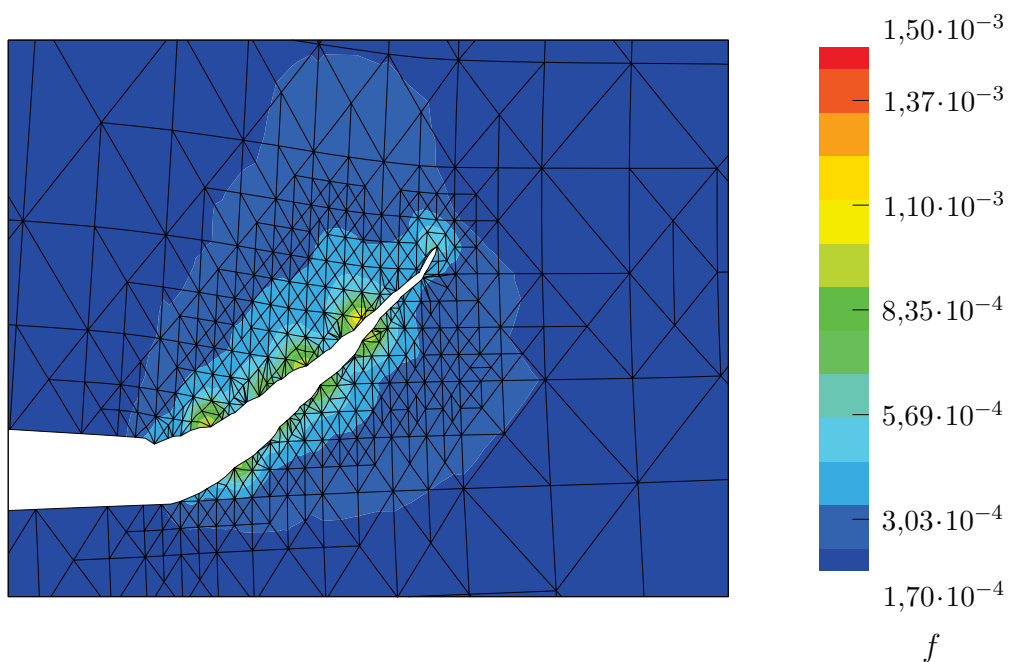


Abbildung 8.40.: Hohlraumvolumen im Bereich der Rissausbreitung

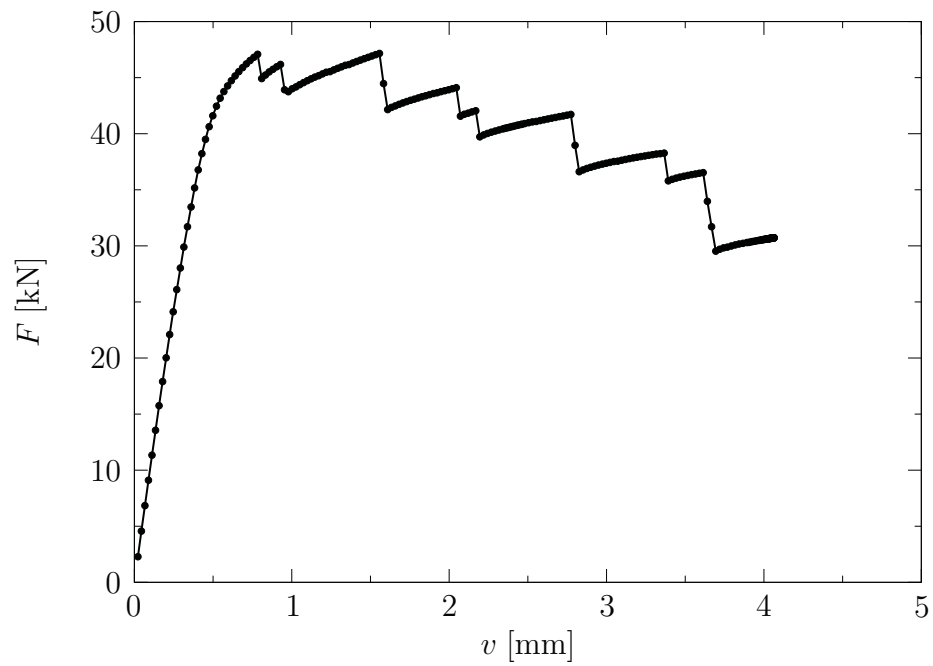


Abbildung 8.41.: Kraft-Weg-Kurve für die modifizierte CT-Probe

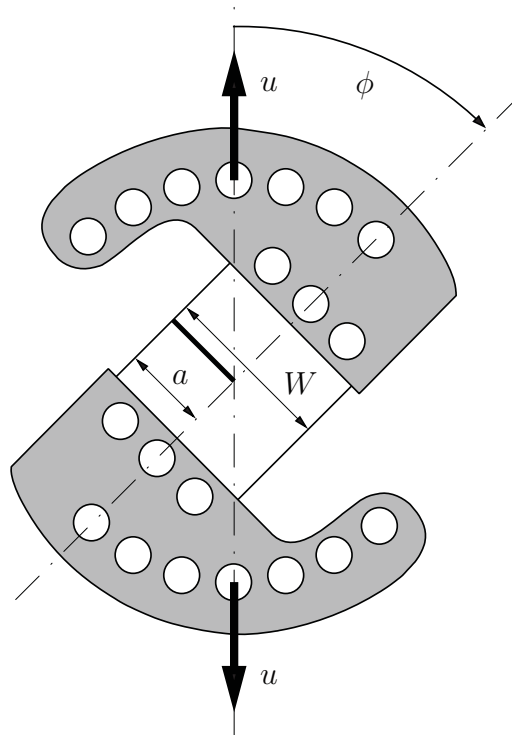
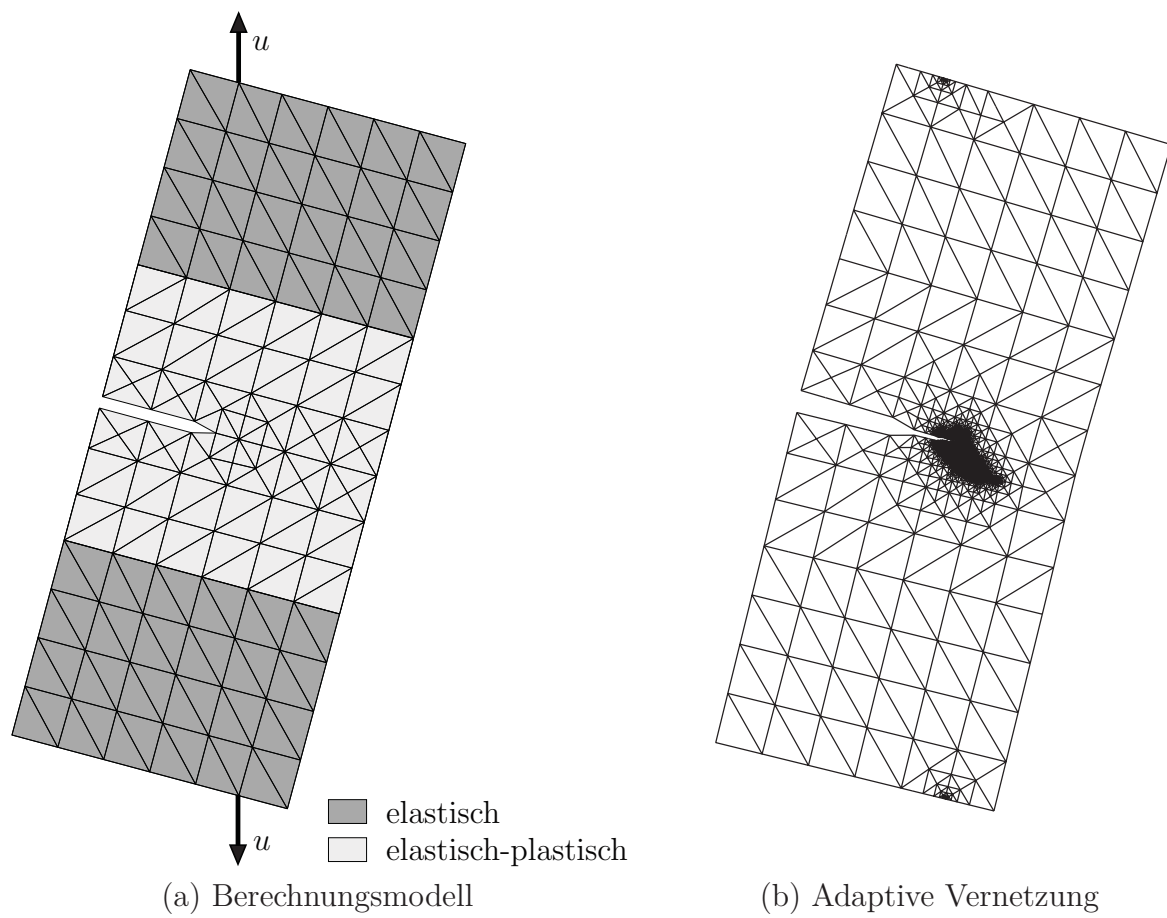
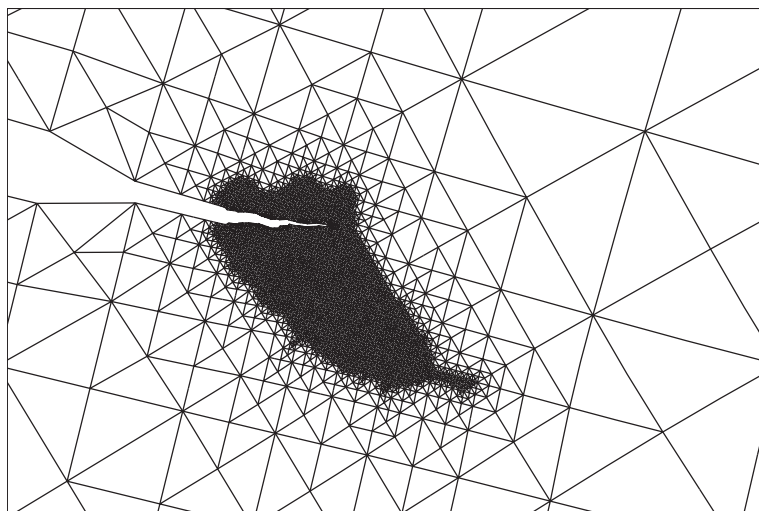


Abbildung 8.42.: Prinzipielle Versuchsanordnung für eine CTS-Probe



Abbildung 8.43.: CTS-Probe ( $\phi = 15^\circ$ ,  $a/W=0,5$ )Abbildung 8.44.: Detail der adaptiven Vernetzung an der Risspitze ( $\phi = 15^\circ$ )

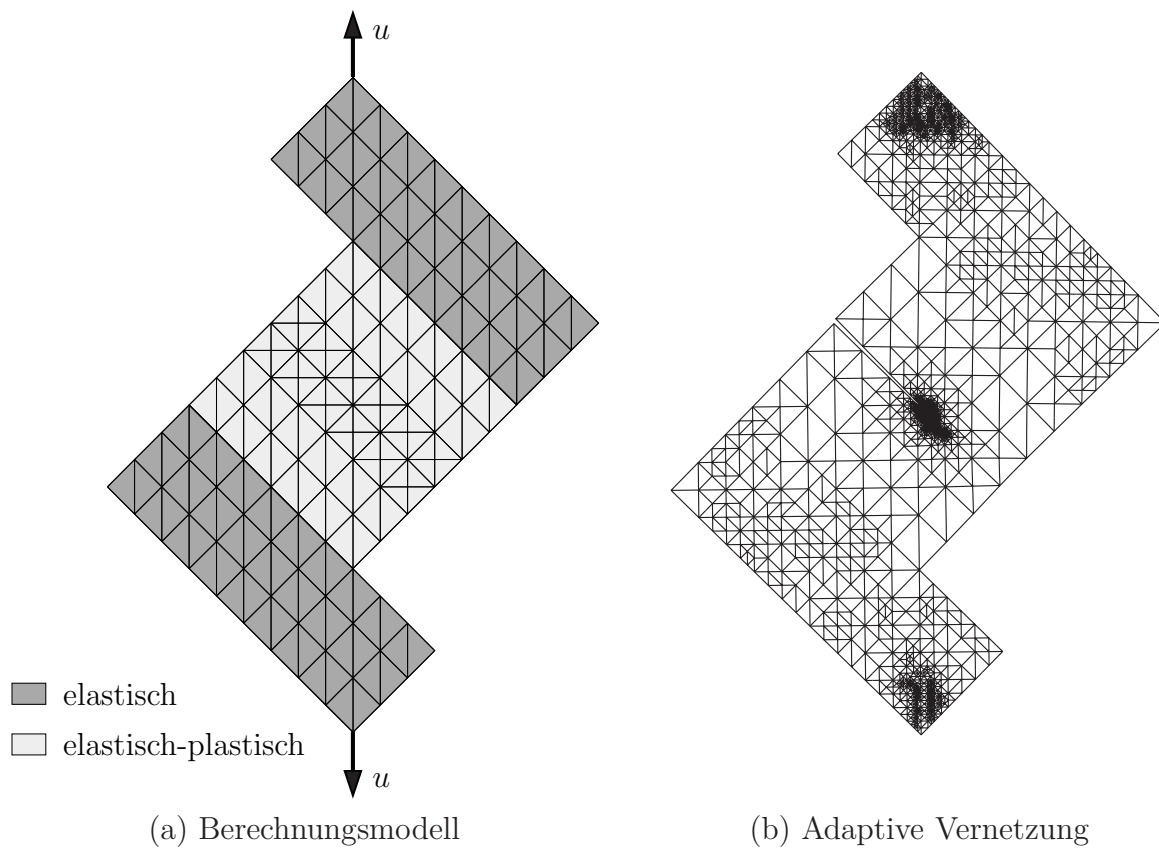


Abbildung 8.45.: CTS-Probe ( $\phi = 45^\circ$ ,  $a/W=0,5$ )

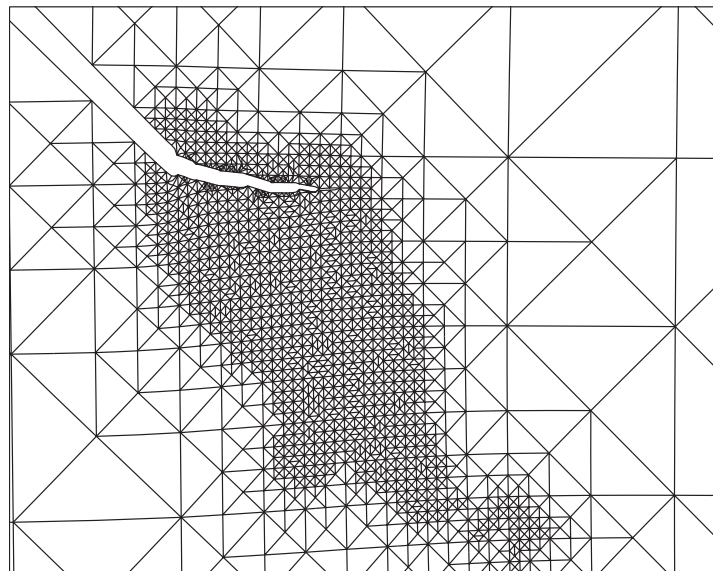


Abbildung 8.46.: Detail der adaptiven Vernetzung an der Risspitze ( $\phi = 45^\circ$ )

## 9. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der zweidimensionalen Simulation der Rissausbreitung mit Hilfe der adaptiven Finite-Elemente-Methode. Das Ziel war die Entwicklung von Algorithmen zur effizienten und automatisierten Modellierung des Risswachstums bei elastischem und plastischem Materialverhalten.

Das zugrunde liegende Konzept besteht in der vollständigen Integration aller Teilschritte der Risswachstumssimulation in ein einziges FE-Programm. Durch den Einsatz eines fehlergesteuerten h-adaptiven Verfahrens ist eine reibungslose automatische Anpassung der FE-Diskretisierung an das gestellte Rissproblem während der gesamten Simulation möglich. Zum Anfang der Simulation kann das Berechnungsmodell als Grobgitter-Modell realisiert werden, welches die Aufgabenstellung im Wesentlichen erfasst. Die adaptive Vorgehensweise führt über die Auswertung der Fehlerindikatoren innerhalb weniger Berechnungsschritte zu einer zweckmäßigen FE-Vernetzung der rissbehafteten Struktur. Somit ist die zeit- und kostenintensive Erstellung einer entsprechenden Startvernetzung, insbesondere in der Rissspitzenumgebung, nicht erforderlich. Die zur adaptiven Vernetzung benötigten Fehlerindikatoren werden dabei vollständig auf Grundlage der berechneten FE-Näherungslösung ermittelt.

Die lokale Netzverfeinerung wird mittels standardisierter Elementteilungen hierarchisch gestaltet. Ausgehend von der Startvernetzung bleibt dabei die Qualität der neu generierten Elemente weitgehend konstant. Da der Algorithmus zur inkrementellen Risserweiterung ebenfalls auf dem Konzept der Elementteilung beruht, bleibt die hierarchische Struktur der Netzverfeinerung während der gesamten Risswachstumssimulation vollständig erhalten und erlaubt so den Einsatz effizienter hierarchischer FE-Solver. Durch das hierarchische Konzept ist außerdem eine einfache Vergröberung des lokal verfeinerten FE-Netzes zu einem späteren Zeitpunkt der Simulation möglich.

Die entwickelten Simulationsprogramme eignen sich vorrangig für die Vorhersage von quasistatischem Risswachstum unter einer Mixed-Mode-Beanspruchung. Bei Erfüllung des Risswachstumskriteriums wird über die Vorgabe von Länge und Richtung die Position der neuen Rissspitze festgelegt. Das inkrementelle Wachsen des Risses wird dabei aus Sicht der Bruchmechanik durch das Bilden neuer Rissoberflächen im Berechnungsmodell simuliert.

Die Simulation der spröden Rissausbreitung erfolgt auf Basis der linear-elastischen Bruchmechanik. Die aktuelle FE-Lösung in der Rissspitzenumgebung bildet dabei die Grundlage zur Bestimmung von Größe und Richtung des Rissfortschritts. In dem Zusammenhang hat es sich als nützlich erwiesen, die dafür benötigten Spannungsintensitätsfaktoren mit Hilfe des J-Integrals in Form der Interaction-Integral-Technik zu ermitteln. Durch diese Herangehensweise entfällt eine aufwändige numerische Auswertung der Feldgrößen an der Rissspitze. Es wird ein Kriterium eingeführt, das auf der Wegunabhängigkeit des Interaction-Integrals beruht. Damit ist in jedem adaptiven Verfeinerungsschritt die Beurteilung der Genauigkeit der bruchmechanischen Kenngrößen und damit auch der Qualität der Rissspitzenvernetzung möglich. Da aufgrund der Spannungssingularität an der Rissspitze der größte lokale Fehler in der numerischen Lösung zu erwarten ist, kann man mit Erfüllung des Qualitätskriteriums davon ausgehen, dass auch das gesamte Modell adäquat vernetzt ist.

Die Anwendungsbeispiele für das spröde Risswachstum zeigen selbständig ablaufende, adaptiv gesteuerte FE-Simulationen der Rissausbreitung mit einer guten experimentellen Übereinstimmung. Mit Hilfe verschiedener adaptiver Steuerparameter ist eine zweckmäßige Einflussnahme auf den Simulationsverlauf möglich.

Eine weitgehend vollständige Beschreibung des Versagensprozess von der Initiierung bis zur Ausbreitung duktiler Risse wird durch die Verbindung der Schädigungsmechanik mit der Bruchmechanik erreicht. Dabei kommt als Materialmodell das ROUSSELIER-Modell zur Anwendung, welches auf einem thermodynamisch konsistenten Ansatz beruht und in der Lage ist, die duktile Schädigung im Werkstoff zu beschreiben. Dadurch wird eine Simulation des duktilen Versagens in der Prozesszone an der Makrorisspitze ermöglicht. Das Kriterium für duktilen Risswachstum basiert dann auf der Auswertung des akustischen Tensors an der Rissspitze und legt den Beginn der makroskopischen Rissausbreitung mit dem Einsetzen der Lokalisierung fest. Zur besseren Approximation des realen Materialverhaltens und zur Vermeidung numerischer Instabilitäten erfolgt eine nichtlokale Erweiterung des Schädigungsmodells. Die für das nichtlokale Konzept notwendige Netzfeinheit in den Bereichen mit Schädigung wird dabei hauptsächlich über die Auswertung der Schädigungsvariablen gesteuert.

Das Anwendungsbeispiel für die duktile Rissausbreitung unter einer Modus-I-Beanspruchung zeigt nach Anpassung der Simulationsparameter eine gute Übereinstimmung mit dem bruchmechanischen Versuch. Dabei existiert noch ein nicht zu vernachlässigender Einfluss der Vernetzung vor der Rissspitze auf die korrekte Modellierung der Rissausbreitung. Die Simulation liefert nur dann plausible Ergebnisse, wenn unabhängig von der vorgegebenen Länge des neuen Rissabschnitts die inkrementelle Rissausbreitung nur entlang einer Elementkante erfolgt. Danach ist in jedem Fall das Kriterium für Risswachstum erneut zu prüfen. Eine experimentelle Verifizierung des Risswachstumskriteriums auf Basis des akustischen Tensors steht für die Mixed-Mode-Belastung noch aus.

Das Konzept der hierarchischen Elementteilung lässt sich problemlos vom zweidimensionalen Dreieckselement auf das dreidimensionale Tetraederelement übertragen. Damit sollte eine analoge Vorgehensweise für die Simulation der räumlichen Rissausbreitung mit Hilfe der FEM möglich sein.



# A. Darstellung der Tensorrechnung

Definition eines Tensors 2. Stufe:

$$\mathbf{T} = T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{S} = S_{kl} \vec{e}_k \vec{e}_l \quad (\text{A.2})$$

Einsteinsche Summationskonvention:

$$\mathbf{T} = T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \quad (\text{A.3})$$

Skalarprodukt und Doppeltes Skalarprodukt:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = T_{ij} S_{jl} \vec{e}_i \vec{e}_l \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{S} = T_{ij} S_{ji} \quad (\text{A.5})$$

Dyadisches Produkt:

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{S} = T_{ij} S_{kl} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k \vec{e}_l \quad (\text{A.6})$$

Spur und Deviator:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^D \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{T}^S = \text{tr}(\mathbf{T}) = \mathbf{I} \cdot \cdot \mathbf{T} = T_{kk} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{T}^D = \mathbf{T} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{T}) \mathbf{I} = \left( T_{ij} - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} \right) \vec{e}_i \vec{e}_j \quad (\text{A.9})$$

Materielle Zeitableitung einer skalaren Funktion in Lagrangescher Darstellung:

$$\frac{df(\mathbf{T})}{dt} = \frac{\partial f(\mathbf{T})}{\partial \mathbf{T}} \cdot \cdot \dot{\mathbf{T}}^T \quad (\text{A.10})$$

**Gradient und Divergenz:**

$$\text{grad}(\mathbf{T}) = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k = T_{jk,i} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k \quad (\text{A.11})$$

$$\text{div}(\mathbf{T}) = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \vec{e}_k = T_{jk,j} \vec{e}_k \quad (\text{A.12})$$

**Gaussscher Integralsatz:**

$$\int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \, dA = \int_V \text{div } \mathbf{T} \, dV \quad (\text{A.13})$$

$$\int_A n_j T_{jk} \, dA = \int_V T_{jk,j} \, dV \quad (\text{A.14})$$

**Hauptinvarianten:**

$$I_{\mathbf{T}} = I(\mathbf{T}) = \text{tr}(\mathbf{T}) = T_{kk} \quad (\text{A.15})$$

$$II_{\mathbf{T}} = II(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} \left( I^2(\mathbf{T}) - I(\mathbf{T}^2) \right) = \frac{1}{2} (T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ji}) \quad (\text{A.16})$$

$$III_{\mathbf{T}} = III(\mathbf{T}) = \frac{1}{3} \left( I(\mathbf{T}^3) + 3I(\mathbf{T})II(\mathbf{T}) - I^3(\mathbf{T}) \right) = \det(T_{ij}) \quad (\text{A.17})$$

**Ableitungen der Hauptinvarianten:**

$$\frac{\partial I_{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{I} \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial II_{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{T}} = I_{\mathbf{T}} \mathbf{I} - \mathbf{T} \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial III_{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{T}} = II_{\mathbf{T}} \mathbf{I} - I_{\mathbf{T}} \mathbf{T} + \mathbf{T}^2 \quad (\text{A.20})$$



## B. 6-Knoten-Dreieckelement

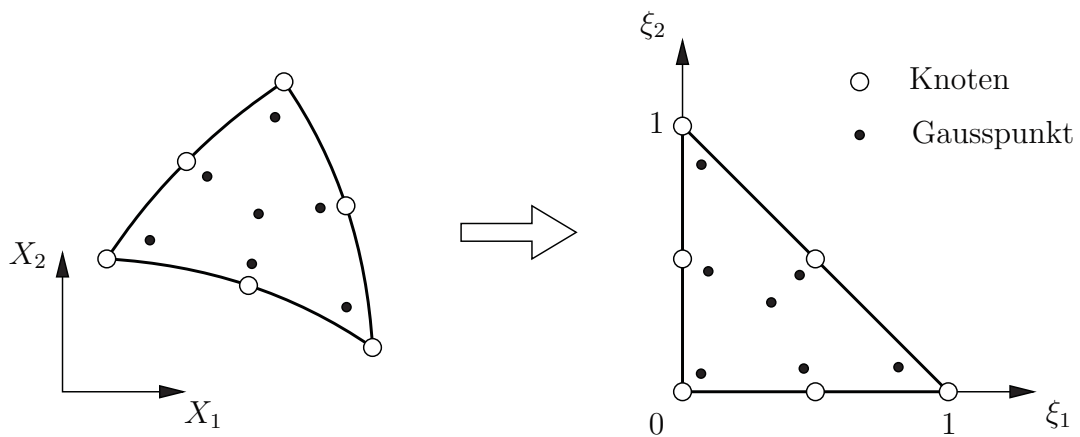


Abbildung B.1.: Isoparametrisches 6-Knoten-Dreieckelement

Formfunktionen:

$$N_1(\boldsymbol{\xi}) = 2(1 - \xi_1 - \xi_2)^2 - 1 - \xi_1 - \xi_2 \quad (\text{B.1})$$

$$N_2(\boldsymbol{\xi}) = 2\xi_1^2 - \xi_1 \quad (\text{B.2})$$

$$N_3(\boldsymbol{\xi}) = 2\xi_2^2 - \xi_2 \quad (\text{B.3})$$

$$N_4(\boldsymbol{\xi}) = 4(1 - \xi_1 - \xi_2)\xi_1 \quad (\text{B.4})$$

$$N_5(\boldsymbol{\xi}) = 4\xi_1\xi_2 \quad (\text{B.5})$$

$$N_6(\boldsymbol{\xi}) = 4(1 - \xi_1 - \xi_2)\xi_2 \quad (\text{B.6})$$

Knoten	$\xi_1$	$\xi_2$
1	0,0	0,0
2	1,0	0,0
3	0,0	1,0
4	0,5	0,0
5	0,5	0,5
6	0,0	0,5

Tabelle B.1.: Lokale Knotenkoordinaten  $\xi$ 

GAUSS-Punkt	$\xi_1$	$\xi_2$	$\omega$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0,1125
2	$\frac{9 - 2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6 + \sqrt{15}}{21}$	$\frac{155 + \sqrt{15}}{2400}$
3	$\frac{6 + \sqrt{15}}{21}$	$\frac{9 - 2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{155 + \sqrt{15}}{2400}$
4	$\frac{6 + \sqrt{15}}{21}$	$\frac{6 + \sqrt{15}}{21}$	$\frac{155 + \sqrt{15}}{2400}$
5	$\frac{9 + 2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6 - \sqrt{15}}{21}$	$\frac{155 - \sqrt{15}}{2400}$
6	$\frac{6 - \sqrt{15}}{21}$	$\frac{9 + 2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{155 - \sqrt{15}}{2400}$
7	$\frac{6 - \sqrt{15}}{21}$	$\frac{6 - \sqrt{15}}{21}$	$\frac{155 - \sqrt{15}}{2400}$

Tabelle B.2.: Lokale Koordinaten  $\xi$  und Wichtungsfaktoren  $\omega$  der GAUSS-Punkte

## C. Interaction-Integral

Abkürzungen:

$$\Delta_1^{\text{AB}} = x_1^{\text{B}} - x_1^{\text{A}} \quad (\text{C.1})$$

$$\Delta_2^{\text{AB}} = x_2^{\text{B}} - x_2^{\text{A}} \quad (\text{C.2})$$

$$r_1 = x_1^{\text{A}} + \Delta_1^{\text{AB}} \zeta \quad (\text{C.3})$$

$$r_2 = x_2^{\text{A}} + \Delta_2^{\text{AB}} \zeta \quad (\text{C.4})$$

$$\phi = \text{atan}(r_2, r_1) \quad (\text{C.5})$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned}
I_m^I = & \int_{\zeta=0}^1 \left[ \left( \left( (u_{2,1}^B - u_{2,1}^A) \Delta_1^{AB} + (\varepsilon_{11}^B - \varepsilon_{11}^A) \Delta_2^{AB} \right) \zeta + u_{2,1}^A \Delta_1^{AB} + \varepsilon_{11}^A \Delta_2^{AB} \right) 8\mu \cos\left(\frac{1}{2}\phi\right) \sin\left(\frac{1}{2}\phi\right) \sin\left(\frac{3}{2}\phi\right) \right. \\
& + \left( \left( (\varepsilon_{11}^B - \varepsilon_{11}^A) \Delta_1^{AB} + (u_{2,1}^A - u_{2,1}^B) \Delta_2^{AB} \right) \zeta + \varepsilon_{11}^A \Delta_1^{AB} - u_{2,1}^A \Delta_2^{AB} \right) 8\mu \cos\left(\frac{3}{2}\phi\right) \cos\left(\frac{1}{2}\phi\right) \sin\left(\frac{1}{2}\phi\right) \\
& + \left( \left( (\sigma_{22}^B - \sigma_{22}^A) \Delta_1^{AB} + (\sigma_{12}^B - \sigma_{12}^A) \Delta_2^{AB} \right) \zeta + \sigma_{22}^A \Delta_1^{AB} + \sigma_{12}^A \Delta_2^{AB} \right) \sin\left(\frac{5}{2}\phi\right) \\
& + \left( \left( (8\nu\sigma_{22}^B - 8\nu\sigma_{22}^A + 9\sigma_{22}^A - 9\sigma_{22}^B) \Delta_1^{AB} + (8\nu\sigma_{12}^A - 8\nu\sigma_{12}^B + 7\sigma_{12}^B - 7\sigma_{12}^A) \Delta_2^{AB} \right) \zeta \right. \\
& + \left. \left( (8\nu\sigma_{22}^A - 9\sigma_{22}^A) \Delta_1^{AB} + (7\sigma_{12}^A - 8\nu\sigma_{12}^A) \Delta_2^{AB} \right) \sin\left(\frac{1}{2}\phi\right) \right. \\
& + \left( \left( (\sigma_{12}^B - \sigma_{12}^A) \Delta_1^{AB} + (\sigma_{22}^A - \sigma_{22}^B) \Delta_2^{AB} \right) \zeta + \sigma_{12}^A \Delta_1^{AB} - \sigma_{22}^A \Delta_2^{AB} \right) \cos\left(\frac{5}{2}\phi\right) \\
& + \left( \left( (8\nu\sigma_{12}^A - 8\nu\sigma_{12}^B + 3\sigma_{12}^B - 3\sigma_{12}^A + 8\mu u_{2,1}^B - 8\mu u_{2,1}^A) \Delta_1^{AB} \right. \right. \\
& + \left. \left. (8\nu\sigma_{22}^A - 8\nu\sigma_{22}^B + 5\sigma_{22}^B - 5\sigma_{22}^A + 8\mu\varepsilon_{11}^A - 8\mu\varepsilon_{11}^B) \Delta_2^{AB} \right) \zeta \right. \\
& + \left. \left. (3\sigma_{12}^A - 8\nu\sigma_{12}^A + 8\mu u_{2,1}^A) \Delta_1^{AB} + (5\sigma_{22}^A - 8\nu\sigma_{22}^A - 8\mu\varepsilon_{11}^A) \Delta_2^{AB} \right) \cos\left(\frac{1}{2}\phi\right) \right] d\zeta
\end{aligned} \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned}
I_m^{\text{II}} = & \int_{\zeta=0}^1 \left[ \left( \left[ \left( \varepsilon_{11}^{\text{A}} - \varepsilon_{11}^{\text{B}} \right) \Delta_1^{\text{AB}} + \left( u_{2,1}^{\text{B}} - u_{2,1}^{\text{A}} \right) \Delta_2^{\text{AB}} \right] \zeta - \varepsilon_{11}^{\text{A}} \Delta_1^{\text{AB}} + u_{2,1}^{\text{A}} \Delta_2^{\text{AB}} \right) 8\mu \cos\left(\frac{1}{2}\phi\right) \sin\left(\frac{3}{2}\phi\right) \sin\left(\frac{1}{2}\phi\right) \right. \\
& + \left( \left[ \left( u_{2,1}^{\text{B}} - u_{2,1}^{\text{A}} \right) \Delta_1^{\text{AB}} + \left( \varepsilon_{11}^{\text{B}} - \varepsilon_{11}^{\text{A}} \right) \Delta_2^{\text{AB}} \right] \zeta + u_{2,1}^{\text{A}} \Delta_1^{\text{AB}} + \varepsilon_{11}^{\text{A}} \Delta_2^{\text{AB}} \right) 8\mu \cos\left(\frac{3}{2}\phi\right) \cos\left(\frac{1}{2}\phi\right) \sin\left(\frac{1}{2}\phi\right) \\
& + \left( \left[ \left( \sigma_{12}^{\text{A}} - \sigma_{12}^{\text{B}} \right) \Delta_1^{\text{AB}} + \left( \sigma_{22}^{\text{B}} - \sigma_{22}^{\text{A}} \right) \Delta_2^{\text{AB}} \right] \zeta - \sigma_{12}^{\text{A}} \Delta_1^{\text{AB}} + \sigma_{22}^{\text{A}} \Delta_2^{\text{AB}} \right) \sin\left(\frac{5}{2}\phi\right) \\
& + \left( \left[ \left( 8\nu \sigma_{12}^{\text{B}} - 8\nu \sigma_{12}^{\text{A}} + 7\sigma_{12}^{\text{A}} - 7\sigma_{12}^{\text{B}} \right) \Delta_1^{\text{AB}} + \left( 8\nu \sigma_{22}^{\text{B}} - 8\nu \sigma_{22}^{\text{A}} + 16\mu \varepsilon_{11}^{\text{B}} - 16\mu \varepsilon_{11}^{\text{A}} + \sigma_{22}^{\text{A}} - \sigma_{22}^{\text{B}} \right) \Delta_2^{\text{AB}} \right] \zeta \right. \\
& + \left. \left( 8\nu \sigma_{12}^{\text{A}} - 7\sigma_{12}^{\text{A}} \right) \Delta_1^{\text{AB}} + \left( 8\nu \sigma_{22}^{\text{A}} - \sigma_{22}^{\text{A}} + 16\mu \varepsilon_{11}^{\text{A}} \right) \Delta_2^{\text{AB}} \right) \sin\left(\frac{1}{2}\phi\right) \\
& + \left( \left[ \left( \sigma_{22}^{\text{B}} - \sigma_{22}^{\text{A}} \right) \Delta_1^{\text{AB}} + \left( \sigma_{12}^{\text{B}} - \sigma_{12}^{\text{A}} \right) \Delta_2^{\text{AB}} \right] \zeta + \sigma_{22}^{\text{A}} \Delta_1^{\text{AB}} + \sigma_{12}^{\text{A}} \Delta_2^{\text{AB}} \right) \cos\left(\frac{5}{2}\phi\right) \\
& + \left( \left[ \left( 8\nu \sigma_{22}^{\text{B}} - 8\nu \sigma_{22}^{\text{A}} + 8\mu \varepsilon_{11}^{\text{B}} - 8\mu \varepsilon_{11}^{\text{A}} + 5\sigma_{22}^{\text{A}} - 5\sigma_{22}^{\text{B}} \right) \Delta_1^{\text{AB}} \right. \right. \\
& + \left. \left( 8\nu \sigma_{12}^{\text{A}} - 8\nu \sigma_{12}^{\text{B}} + 8\mu u_{2,1}^{\text{A}} - 8\mu u_{2,1}^{\text{B}} + 11\sigma_{12}^{\text{B}} - 11\sigma_{12}^{\text{A}} \right) \Delta_2^{\text{AB}} \right] \zeta \\
& + \left. \left( 8\nu \sigma_{22}^{\text{A}} + 8\mu \varepsilon_{11}^{\text{A}} - 5\sigma_{22}^{\text{A}} \right) \Delta_1^{\text{AB}} - \left( 8\nu \sigma_{12}^{\text{A}} + 8\mu u_{2,1}^{\text{A}} - 11\sigma_{12}^{\text{A}} \right) \Delta_2^{\text{AB}} \right) \cos\left(\frac{1}{2}\phi\right) \left. \right] \text{d}\zeta
\end{aligned} \tag{C.8}$$



# Literaturverzeichnis

- [1] ABDELAZIZ, Y. ; HAMOUINE, A.: A survey of the extended finite element. In: *Computers and Structures* 86 (2008), Nr. 11-12, S. 1141–1151
- [2] ALTENBACH, J. ; ALTENBACH, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Stuttgart : Teubner-Verlag, 1994
- [3] ANDERSON, H.: A finite element representation of stable crack growth. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 21 (1973), S. 337–356
- [4] ANDERSON, T.L.: *Fracture mechanics: Fundamentals and applications*. CRC Press, 1995. – Second Edition
- [5] APEL, T. ; MÜCKE, R. ; WHITEMAN, J.: An adaptive finite element technique with a-priori mesh grading / BICOM Institute of Computational Mathematics. 1993 (9). – Technical Report
- [6] ASTM E1820-99A: *Standard test method for measurement of fracture toughness*. American Society for Testing and Materials, 2000
- [7] BAASER, H.: *Dreidimensionale Simulation duktiler Schädigungsentwicklung und Rißausbreitung*, Dissertation, 1999
- [8] BAASER, H.: *Anmerkungen zur Simulation von entfestigendem Materialverhalten*, TU Darmstadt, Habilitation, 2004
- [9] BABUŠKA, I. ; MILLER, A.: A-posteriori error estimates and adaptive techniques for the finite element method / Institute for Physical Sciences and Technology, University of Maryland. 1981. – Report
- [10] BABUŠKA, I. ; RHEINOLDT, W.C.: A posteriori error estimates for the finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 12 (1978), S. 1597–1615

- 
- [11] BAŞAR, D. Y. und W. Y. und Weichert: *Nonlinear continuum mechanics of solids*. Berlin : Springer-Verlag, 2000
- [12] BANK, R.E. ; SMITH, R.K.: Mesh smoothing using a posteriori error estimates. In: *Journal of Numerical Analysis* 34 (1997), S. 979–997
- [13] BARENBLATT, G.I.: The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. In: *Advances in Applied Mechanics* 7 (1962), S. 55–129
- [14] BARSOUM, R.S.: Triangular quarterpoint elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 11 (1977), S. 85–98
- [15] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer Berlin, 2001
- [16] BAZANT, Z. P. ; JIRÁSEK, M.: Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress. In: *Journal of Engineering Mechanics* 128 (2002), S. 1119–1149
- [17] BAZANT, Z.P.: Instability, ductility and size effect in strain softening concrete. In: *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division* 102 (1976), S. 331–344
- [18] BAZANT, Z.P. ; PIAUDIER-CABOT, G.: Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. In: *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics* 55 (1988), Nr. 2, S. 287–293
- [19] BELYTSCHKO, T. ; BAZANT, Z.P. ; HYUN, Y.W. ; CHANG, T.P.: Strain-softening materials and finite element solutions. In: *Computers & Structures* 23 (1986), S. 163–180
- [20] BELYTSCHKO, T. ; BLACK, T.: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45 (1999), S. 601–620
- [21] BENALLAL, A. ; BILLARDON, R. ; GEYMONAT, G.: Some mathematical aspects of the damage softening rate problem. In: MAZARS, J. (Hrsg.) ; BAZANT, Z. P. (Hrsg.): *Cracking and damage - Strain localization and size effect*, Elsevier Appl. Sci., London, New York, 1989, S. 247–257
- [22] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik*. Berlin : Springer-Verlag, 1993
- [23] BJÖRK, Ake: *Numerical methods for least squares problems*. SIAM, 1996



- 
- [24] BLUMENAUER, H. ; PUSCH, G.: *Technische Bruchmechanik*. Leipzig - Stuttgart : Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1993
- [25] BORST, R. de: Some recent issues in computational failure mechanics. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2001), Nr. 52, S. 63–95
- [26] BORST, R. de ; SLUYS, L.J. ; MÜHLHAUS, H.-B. ; PAMIN, J.: Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. In: *Engineering Computations* 10 (1993), Nr. 2, S. 99–121
- [27] BRAMBLE, J.H. ; PASCIAK, J.E. ; XU, J.: Parallel multilevel preconditioners. In: *Mathematics of Computation* 55 (1990), Nr. 191, S. 1–22
- [28] BROCKS, W. ; CORNEC, A.: Cohesive models - Special issue. In: *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003), Nr. 14
- [29] BUCHER, A. ; MEYER, A. ; GÖRKE, U.-J. ; KREISSIG, R.: Entwicklung von adaptiven Algorithmen für nichtlineare FEM / TU Chemnitz. 2004 (SFB393/04-03). – Preprint-Reihe des Chemnitzer SFB 393
- [30] BUCHER, A. ; MEYER, A. ; GÖRKE, U.-J. ; KREISSIG, R.: A contribution to error estimation and mapping algorithms for a hierarchical adaptive FE-strategy in finite elastoplasticity. In: *Computational Mechanics* 36 (2005), Nr. 3, S. 182–195
- [31] BUCHER, A. ; MEYER, A. ; GÖRKE, U.-J. ; KREISSIG, R.: A comparison of mapping algorithms for hierarchical adaptive FEM in finite elasto-plasticity. In: *Computational Mechanics* 39 (2007), Nr. 4, S. 521–536
- [32] BÄNSCH, E.: Local mesh refinement in 2 and 3 dimensions. In: *IMPACT of Computing in Science and Engineering* 3 (1991), S. 181–191
- [33] CARVALHO, C.V. ; DE ARAÚJO, T.D. ; CAVALCANTE, J.B. ; MARTHA, L.F. ; BITTENCOURT, T.N.: Automatic fatigue crack propagation using a self-adaptive strategy. In: *PACAM VI - Sixth Pan-American Congress of Applied Mechanics, Rio de Janeiro*, 1999, S. 377–380
- [34] CAVALCANTE NETO, J.B. ; WAWRZYNEK, P.A. ; CARVALHO, M.T.M. ; MARTHA, L.F. ; INGRAFFEA, A.R.: An algorithm for three-dimensional mesh generation for arbitrary regions with cracks. In: *Engineering with Computers* 17 (2001), Nr. 1, S. 75–91
- [35] CHENG, J.H. ; FINNIGAN, P.M. ; HATHAWAY, A.F. ; KELA, A. ; SCHROEDER, W.J.: Quadtree/Octree meshing with adaptive analysis. In: SENGUPTA, S. (Hrsg.)

- ; HAUSER, J. (Hrsg.) ; EISEMAN, P.R. (Hrsg.) ; THOMPSON, J.F. (Hrsg.): *Numerical grid generation in computational fluid mechanics '88*, Pineridge Press, 1988, S. 633–642
- [36] CHEREPANOV, G.P.: Crack propagation in continuous media. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 31 (1967), S. 503–512
- [37] COOK, G. ; TIMBRELL, C. ; CLAYDON, P.: Automatic and adaptive finite element mesh generation for full 3D fatigue crack growth. In: *Zentech International Limited*, 1990 (Struceng & Femcad Conference, Grenoble, France,)
- [38] DE BORST, R. ; VAN DER GIESSEN, E.: *Material instabilities in solids*. John Wiley & Sons, Ltd., 1998
- [39] DE KONING, A.U.: A contribution to the analysis of quasi static crack growth in the sheet materials. In: TAPLIN, D.M.R. (Hrsg.): *Fracture 1977, Proceedings of the 4th International Conference on Fracture* Bd. 3, 1977, S. 25–31
- [40] DEUFLHARD, P. ; HOHMANN, A.: *Numerische Mathematik I*. Berlin : Walter de Gruyter Verlag, 1993
- [41] DOLBOW, J.: *An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics*, Northwestern University, Evanston, IL, PhD. Thesis, 1999
- [42] DUGDALE, D.S.: Yielding of steel sheets containing slits. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8 (1960), S. 100–104
- [43] DUMSTORFF, P.: *Modellierung und numerische Simulation von Rissfortschritt in spröden und quasi-spröden Materialien auf Basis der Extended Finite Element Method*, Ruhr-Universität Bochum, Dissertation, 2006
- [44] ERDOGAN, F. ; RATWANI, M.: Fatigue and fracture of cylindrical shells containing a circumferential crack. In: *International Journal of Fracture Mechanics* 6 (1970), Nr. 4, S. 379–392
- [45] ERDOGAN, F. ; SIH, G.C.: On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. In: *ASME Journal of Basic Engineering* Vol.85 (1963), S. 519–527
- [46] FULLAND, M. ; RICHARD, H.A.: Finite-element-based fatigue crack growth simulation in real structures. In: BUCHHOLZ, F.G. (Hrsg.) ; RICHARD, H.A. (Hrsg.) ; ALIABADI, M.H. (Hrsg.): *Advances in fracture and damage mechanics*, Trans Tech Publications, Zuerich, 2003, S. 79–84

- [47] GAGO, J.P. ; KELLY, D.W. ; ZIENKIEWICZ, O.C. ; BABUSKA, I.: A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 19 (1983), Nr. 11, S. 1593–1656
- [48] GRAVOUIL, A. ; MOËS, N. ; BELYTSCHKO, T.: Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets. Part II: Level set update. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53 (2002), S. 2569–2586
- [49] GREAVES, D.M. ; BORTHWICK, A.G.L.: Hierarchical tree-based finite element mesh generation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45 (1999), Nr. 4, S. 447–471
- [50] GROSS, D.: *Bruchmechanik*. Berlin - Heidelberg - New York : Springer-Verlag, 1996
- [51] GURLAND, J. ; PLATEAU, J.: The mechanism of ductile rupture of metals containing inclusions. In: *Transactions of the ASM* 56 (1963), S. 442–454
- [52] GURSON, A. L.: Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - Yield criteria and flow rules for porous ductile materials. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 99 (1977), Nr. 1, S. 2–15
- [53] GÖRKE, U.-J. ; BUCHER, A. ; KREISSIG, R. ; MICHAEL, D.: Ein Beitrag zur Lösung von Anfangs-Randwert-Problemen einschließlich der Materialmodellierung bei finiten elastisch-plastischen Verzerrungen mit Hilfe der FEM / TU Chemnitz. 2000 (SFB393/00-09). – Preprint-Reihe des Chemnitzer SFB 393
- [54] HABRAKEN, A.M. ; CESCOTTO, S.: An automatic remeshing technique for finite element simulation of forming processes. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 30 (1990), Nr. 8, S. 1503–1525
- [55] HAUPT, P.: *Continuum mechanics and theory of materials*. Berlin : Springer-Verlag, 2002
- [56] HELLEN, T.K. ; BLACKBURN, W.S.: The calculation of stress intensity factors for combined tensile and shear loading. In: *International Journal of Fracture* 11 (1975), Nr. 4, S. 605–617
- [57] HENRY, G. ; HORSTMANN, D.: *De Ferri Metallographia, Band V. Fraktographie und Mikrofraktographie*. Verlag Stahleisen mbH., Düsseldorf, 1979
- [58] HENSHELL, R.D. ; SHAW, K.G.: Crack-tip finite elements are unnecessary. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 9 (1975), S. 495–507

- 
- [59] HIBBITT, KARLSSON & SORENSSEN: *ABAQUS / Standard user's manual Ver. 5.8*. Pawtucket, USA, 1998
- [60] HILL, R.: Acceleration waves in solids. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10 (1962), S. 1–16
- [61] HOHE, J. ; FRIEDMANN, V. ; WENCK, J. ; SIEGELE, D.: Assessment of the role of micro defect nucleation in probabilistic modeling of cleavage fracture. In: *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008), S. 3306–3327
- [62] INGRAFFEA, A.R. ; SAOUMA, V.: Numerical modelling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete. In: SIH, G. (Hrsg.) ; DiTOMMASO, A. (Hrsg.): *Fracture mechanics of concrete: Structural application and numerical calculation*. Dordrecht, Boston, 1985, S. 171–225
- [63] JACKIEWICZ, J.: Numerical aspects of non-local modeling of the damage evolution in elastic-plastic materials. In: *Computational Materials Science* 19 (2000), S. 235–251
- [64] JACKIEWICZ, J. ; KUNA, M.: Non-local regularization for FE simulation of damage in ductile materials. In: *Computational Materials Science* 28 (2003), S. 684–695
- [65] JAMES, M.A.: *A plane stress finite element model for elastic-plastic mode I/II crack growth*, Kansas State University, Manhattan, Kansas, PhD. Thesis, 1998
- [66] KHOEI, A.R. ; AZADIA, H. ; MOSLEMI, H.: Modeling of crack propagation via an automatic adaptive mesh refinement based on modified superconvergent patch recovery technique. In: *Engineering Fracture Mechanics* 25 (2008), Nr. 10, S. 2921–2945
- [67] KOENKE, C. ; HARTE, R. ; KRÄTZIG, W.B. ; ROSENSTEIN, O.: On adaptive remeshing techniques for crack simulation problems. In: *Engineering Computations* 15 (1998), Nr. 1, S. 74–88
- [68] KRAJCINOVIC, D.: *Damage mechanics*. Amsterdam : Elsevier, 1996
- [69] KULLMER, G.: Ein neues Modell zur Beschreibung der Ermüdungsrissoausbreitung. In: *DVM-Bericht 231, Bruchmechanische Bewertungskonzepte im Leichtbau*. Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung, Berlin, 1999, S. 141–152
- [70] KUNA, M.: *Numerische Beanspruchungsanalyse von Rissen*. Vieweg + Teubner, 2008

- 
- [71] KUNERT, G. ; VERFÜRTH, R.: Edge residuals dominate a posteriori error estimates for linear finite element methods on anisotropic triangular and tetrahedral meshes. In: *Numerische Mathematik* 86 (2000), Nr. 2, S. 283–303
- [72] KUSSMAUL, K. ; EISELE, U. ; SEIDENFUSS, M.: On the applicability of local approach models for the determination of the failure behaviour of steels of different toughness. In: *Fatigue and Fracture Mechanics in Pressure Vessels and Piping* American Society of Mechanical Engineers, US, 1995, S. 17–25
- [73] LEE, E.H.: Elastic-plastic deformation at finite strains. In: *Journal of Applied Mechanics* 36 (1969), S. 1–6
- [74] LEMAITRE, J.: *A course on damage mechanics*. Springer, Berlin, 1992
- [75] LEMAITRE, J. ; CHABOCHE, J.-L.: *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, 1994
- [76] LEMAITRE, J. ; DESMORAT, R.: *Engineering damage mechanics*. Springer, Berlin, 2005
- [77] LI, Xiang yang ; TENG ALPER, Shang hua: Simultaneous refinement and coarsening for adaptive meshing. In: *Engineering with Computers* 15 (1999), S. 280–291
- [78] LO, S.H. ; LEE, C.K.: Solving crack problems by an adaptive refinement procedure. In: *Engineering Fracture Mechanics* 43 (1992), Nr. 2, S. 147–163
- [79] LUBLINER, J.: *Plasticity theory*. New York : Macmillan Publishing Company, 1990
- [80] MARSDEN, J.E. ; HUGHES, T.J.R.: *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983
- [81] MEDIAVILLA, J.: *Continuous and discontinuous modelling of ductile fracture*, Technische Universiteit Eindhoven, PhD. Thesis, 2005
- [82] MEDIAVILLA, J. ; PEERLINGS, R.H.J. ; GEERS, M.G.D.: Discrete crack modelling of ductile fracture driven by non-local softening plasticity. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 66 (2006), S. 661–688
- [83] MEYER, A.: Hierarchical preconditioners for high order elements and application in computational mechanics. In: TOPPING, B. (Hrsg.): *Developments in computational mechanics with high performance computing*. Civil-Comp Press, Edinburgh, 1999, S. 107–112

- 
- [84] MEYER, A.: Programmer's manual for adaptive finite element code SPC-PM 2Ad / TU Chemnitz. 2001 (SFB393/01-18). – Preprint-Reihe des Chemnitzer SFB 393
- [85] MEYER, A.: A new efficient preconditioner for crack growth problems / TU Chemnitz. 2005 (SFB393/05-06). – Preprint-Reihe des Chemnitzer SFB 393
- [86] MEYER, A. ; RABOLD, F. ; SCHERZER, M.: Efficient finite element simulation of crack propagation using adaptive iterative solvers. In: *Communications in Numerical Methods in Engineering* (2006), Nr. 22, S. 93–108
- [87] Морозов, Е.М. ; Никишкоф, Г.П.: Метод конечных элементов в механике разрушения. Москва : НАУКА, 1980
- [88] MOËS, N. ; GRAVOUIL, A. ; BELYTSCHKO, T.: Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets. Part I: Mechanical model. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53 (2002), S. 2549–2568
- [89] MURAKAMI, Y. (Hrsg.): *Stress intensity factors handbook*. Pergamon Press, Oxford, 1987
- [90] NEEDLEMAN, A.: A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. In: *Journal of Applied Mechanics* 54 (1987), S. 525–531
- [91] NEWMAN, J.C. Jr.: *Finite-element analysis of fatigue crack propagation - Including the effects of crack closure*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, PhD. Thesis, 1974
- [92] NGO, D. ; SCORDELIS, A.C.: Finite element analysis of reinforced concrete beams. In: *Journal of the American Concrete Institute* 64 (1967), S. 152–163
- [93] NISHIOKA, Atluri S. T.: Numerical modeling of dynamic crack propagation in finite bodies by moving singular elements. In: *Journal of Applied Mechanics* 47 (1980), S. 570–582
- [94] OHSER, J. ; LORZ, U.: *Quantitative Gefügeanalyse: Theoretische Grundlagen und Anwendung*. Leipzig - Stuttgart : Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1994. – Freiburger Forschungsheft B 267
- [95] ORTIZ, M. ; QUIGLEY, J.J.: Adaptive mesh refinement in strain localization problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 90 (1991), S. 781–804
- [96] PALANI, G. S. ; IYER, R.N. ; DATTA GURU, B.: New a posteriori error estimator



- and adaptive mesh refinement strategy for 2-d crack problems. In: *Engineering Fracture Mechanics* 73 (2006), Nr. 6, S. 802–819
- [97] PARIS, P ; ERDOGAN, F: A critical analysis of crack propagation laws. In: *Journal of Basic Engineering* 85 (1963), Nr. 4, S. 528–534
- [98] PARISCH, H.: *Festkörper-Kontinuumsmechanik: Von den Grundgleichungen zur Lösung mit Finiten Elementen*. Vieweg+Teubner, 2003
- [99] PIJAUDIER-CABOT, G. ; BAZANT, Z.P.: Nonlocal damage theory. In: *Journal of Engineering Mechanics* 113 (1987), Nr. 10, S. 1512–1533
- [100] POOK, L.P.: *Crack paths*. WITpress, Southampton, Boston, 2002
- [101] POTYONDY, D.O. ; WAWRZYNEK, P.A. ; INGRAFFEA, A.R.: An algorithm to generate quadrilateral or triangular element surface meshes in arbitrary domains with applications to crack propagation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38 (1995), S. 2677–2701
- [102] QIAN, J. ; FATEMI, A.: Mixed mode fatigue crack growth: A literature survey. In: *Engineering Fracture Mechanics* 55 (1996), Nr. 6, S. 969–990
- [103] REUSCH, F.: *Entwicklung und Anwendung eines nicht-lokalen Materialmodells zur Simulation duktiler Schädigung in metallischen Werkstoffen*, Lehrstuhl für Mechanik, Universität Dortmund, Dissertation, 2003
- [104] REUSCH, F. ; KLINGBEIL, D. ; SCHMAUDER, S.: Simulation duktilen Rissfortschritts in einem Al/SiC Verbundwerkstoff mit dem Materialmodell von Gurson. In: *DVM - AK-Bruch*, 1996
- [105] RICE, J. R. ; TRACEY, D. M.: On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 17 (1969), S. 201–217
- [106] RICE, J.R.: A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. In: *Journal of Applied Mechanics* 35 (1968), S. 376–386
- [107] RICE, J.R.: The localization of plastic deformation. In: *Theoretical and Applied Mechanics* 1 (1976), S. 207–220. – Proceedings of the 14th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Delft, 1976, ed. W.T. Koiter
- [108] RICHARD, H. A. ; FULLAND, M. ; SANDER, M.: Theoretical crack path prediction. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 28 (2005), S. 3–12

- 
- [109] RICHARD, H.A.: *Bruchvorhersagen bei überlagerter Normal- und Schubbeanspruchung von Rissen*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1985. – VDI-Forschungsheft 631/85
- [110] ROUSSELIER, G.: Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. In: *Nuclear Engineering and Design* 105 (1987), Nr. 1, S. 97–111
- [111] ROUSSELIER, G. ; DEVAUX, J.-C. ; MOTTET, G. ; DEVESA, G.: A methodology for ductile fracture analysis based on damage mechanics: An illustration of a local approach of fracture. In: *Nonlinear fracture mechanics: Volume II - Elastic-plastic fracture*. American Society for Testing and Materials, 1989, S. 332–354
- [112] RUDNICKI, J.W. ; RICE, J.R.: Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 23 (1975), S. 371–394
- [113] SANDHU, J.S. ; MENANDRO, F.C.M. ; LIEBOWITZ, H. ; MOYER, E.T. Jr: Hierarchical mesh adaptation of 2d quadrilateral elements. In: *Engineering Fracture Mechanics* 50 (1995), Nr. 5-6, S. 727–735
- [114] SCHWARZ, M.: *Simulation der Rissausbreitung in der Nähe von Materialeinschlüssen*, Institut für Mechanik und Fluidodynamik, TU Bergakademie Freiberg, Studienarbeit, September 2005
- [115] SCHÖLLMANN, M. ; FULLAND, M. ; RICHARD, H.A.: Development of a new software for adaptive crack growth simulations in 3d structures . In: *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003), Nr. 2, S. 249–268
- [116] SEEBICH, H.-P.: *Mikromechanisch basierte Schädigungsmodelle zur Beschreibung des Versagensablaufs ferritischer Bauteile*, Institut für Materialprüfung, Werkstoffkunde und Festigkeitslehre, Universität Stuttgart, Materialprüfungsanstalt Universität Stuttgart, Dissertation, 2006
- [117] SEIDENFUSS, M.: *Untersuchungen zur Beschreibung des Versagensverhaltens mit Hilfe von Schädigungsmodellen am Beispiel des Werkstoffes 20MnMoNi5-5*. MPA Universität Stuttgart, Dissertation, 1992
- [118] SHIH, C.F. ; ASARO, R.J.: Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces. Part I: Small scale yielding. In: *Journal of Applied Mechanics* 55 (1988), S. 299–316
- [119] SIMO, J.C.: A Framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part I: Continuum formulation. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 66 (1988), S. 199–219



- 
- [120] SIMO, J.C. ; HUGHES, T.J.R.: *Computational inelasticity*. New York : Springer-Verlag, 1998
- [121] SIMONE, A. ; WELLS, G. N. ; SLUYS, L.J.: From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum model. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), S. 4581–4607
- [122] SIMS, F. ; RHODES, J. ; CLOUGH, R.: Cracking in norfolk dam. In: *Journal of the American Concrete Institute* (1964), S. 265–285
- [123] SKRZYPEK, J.J. ; GANCZARSKI, A.: *Modeling of material damage and failure of structures*. Springer, Berlin, 1998
- [124] SPITZIG, W.A. ; KELLY, J.F. ; RICHMOND, O.: Quantitative characterization of second phase populations. In: *Metallography* 18 (1985), S. 235–241
- [125] SPRINGMANN, M.: *Identifikation von Materialparametern schädigungsmechanischer Gesetze unter Einbeziehung der Dehnungslokalisierung*, Technische Universität Bergakademie Freiberg, Dissertation, 2005
- [126] SPRINGMANN, M. ; KUNA, M.: Identifikation schädigungsmechanischer Materialparameter mit Hilfe nichtlinearer Optimierungsverfahren am Beispiel des Rousselier Modells / TU Chemnitz. 2002 (SFB393/02-08). – Preprint-Reihe des Chemnitzer SFB 393
- [127] STEGLICH, D.: *Bestimmung von mikrostrukturellen Parametern in Schädigungsmodellen für duktile Metalle*, Dissertation, 1999
- [128] STEGLICH, D. ; BROCKS, W.: Micromechanical modelling of damage and fracture of ductile materials. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 21 (1998), S. 1175–1188
- [129] STEIN, E. (Hrsg.): *Error-controlled adaptive finite elements in solid mechanics*. Wiley & Sons, 2003
- [130] STEINMANN, P. ; MIEHE, C ; STEIN, E.: Comparison of different finite deformation inelastic damage models within multiplicative elasto-plasticity for ductile materials. In: *Computational Mechanics* 13 (1994), S. 458–474
- [131] STERN, M. ; BECKER, E.B. ; DUNHAM, R.S.: A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors. In: *International Journal of Fracture* 12 (1976), Nr. 3, S. 359–368

- [132] SUKUMAR, N. ; MOËS, N. ; MORAN, B. ; BELYTSCHKO, T.: Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48 (2000), Nr. 11, S. 1549–1570
- [133] SUN, D.Z. ; KIENZLER, R. ; VOSS, B. ; SCHMITT, W.: Application of micro-mechanical models to the prediction of ductile fracture. In: *Fracture Mechanics: Twenty-Second Symposium*. Bd. 2, 1990, S. 368–378
- [134] SWENSON, D.V.: *Modeling mixed-mode dynamic crack propagation using finite elements*, Cornell University, Ithaca, New York, PhD. Thesis, 1985
- [135] TABIEL, A. ; WU, J.: Development of the DYNA3D simulation code with automated fracture procedure for brick elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 57 (2003), S. 1979–2006
- [136] THEILIG, H. ; WÜNSCHE, M. ; BERGMANN, R.: Numerische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung gekrümmter Ermüdungsrisse bei proportionaler zyklischer Belastung. In: *DVM-Bericht 235 "Fortschritte der Bruch- und Schädigungsmechanik" 2003*, Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e.V., 2003, S. 239–248
- [137] TRUESDELL, C. ; NOLL, W.: The non-linear field theories of mechanics. In: *Handbuch der Physik, Band III/3*. Berlin : Springer-Verlag, 1965, S. 1–602
- [138] TVERGAARD, V. ; NEEDLEMAN, A.: Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. In: *Acta Metallurgica* 32 (1984), Nr. 1, S. 157–169
- [139] VERFÜRTH, R.: *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Chichester - Stuttgart : Wiley-Teubner, 1996
- [140] WANG, Y.-S.: A simplified theory of the constitutive equations of metal plasticity at finite deformation. In: *Journal of Applied Mechanics* 95 (1973), S. 941–947
- [141] WAWRZYNEK, P.A. ; INGRAFFEA, A.R.: Discrete modeling of crack propagation. Theoretical aspects and implementation issues in two and three dimensions / Department of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, New York. 1991 (91-5). – Report
- [142] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer, Berlin, 2001
- [143] YAU, J.F. ; WANG, S.S. ; CORTEN, H.T.: A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. In: *Journal of Applied Mechanics* 47 (1980), S. 335–341

- 
- [144] YSERENTANT, H.: On the multi-level splitting of finite element spaces. In: *Numerische Mathematik* 49 (1986), Nr. 4, S. 379–412
  - [145] ZIENKIEWICZ, O. C.: *Methode der finiten Elemente*. Leipzig : Fachbuchverlag, 1987
  - [146] ZIENKIEWICZ, O.C. ; J.Z., Zhu: A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24 (1987), S. 337–357
  - [147] ZIENKIEWICZ, O.C. ; ZHU, J.Z.: The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 110 (1992), Nr. 1-3, S. 207–224